
Wege in der Begabungsförderung
in Mathematik
özbf
Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabungsforschung
Begabung entfalten · Zukunft gestalten
icbf
Internationales Centrum für Begabungsforschung
Drehtürmodell
Lernverträge
Atelierbetrieb
Portfolio
Differenzierte Lernziele und Lernprodukte
Peer Teaching
Lerninseln
Flexible Gruppierung
Offene Aufgaben
Forschendes Lernen
Stationenlernen
Begabungsfördernde Leistungsbeurteilung
Formatives Assessment
Förderorientierte Leistungsrückmeldung
Außerschulische Fördermaßnahmen
Schüler/innen an die Hochschulen • Kinderunis • Sommerakademien • Wettbewerbe & Olympiaden usw.
Vorzeitiges Einschulen und Überspringen
Coaching
Mentoring
Tutoring
Beratung
Einflussfaktoren
Persönlichkeitsmerkmale
• Leistungsmotivation
• Stressbewältigung
• Arbeits- und Lernstrategien
Umweltmerkmale
• Familie
• Unterrichtsqualität
• Klassen- und Schulklima
• Kritische Lebensereignisse
Begabungen fördern heißt Wissen und Fähigkeiten aufbauen und Persönlichkeit entwickeln
Weißbuch
Strategien für die Begabtenförderung
FAQs
Antworten auf häufig gestellte Fragen
Meilensteine und Ziele
Schulentwicklung durch Begabungs- und Exzellenzförderung
Begabung entwickelt Schule und Unterricht
Handbuch Schulentwicklung
Bundeslandkoordinationsstellen
Ansprechpersonen in den Bundesländern
begabt & exzellent
Zeitschrift für Begabtenförderung und Begabungsforschung
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG
www.oezbf.at/plakat-mathe

Inhalt

Nutzungsmöglichkeiten des „Drehtürmodells“ für die Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler

In diesem Beitrag werden Charakteristika, besondere Vorzüge wie auch Probleme dreier verschiedener Organisationsformen des Drehtürmodells für die Förderung mathematisch begabter bzw. sehr leistungsstarker Schüler/innen beschrieben, die in der Schulpraxis relativ häufig genutzt werden. Anschließend werden wichtige methodisch-organisatorische Hinweise für die Umsetzung der Organisationsformen gegeben.

1. Hauptorganisationsformen des Drehtürmodells

1.1 (Selbstständiges) Arbeiten an einem Forschungs- bzw. Projektthema

Bei dieser Fördermaßnahme wird mathematisch sehr leistungsstarken bzw. begabten Kindern, die den curricularen Lernstoff des laufenden Mathematikunterrichts (zumindest (bereits)) weitestgehend beherrschen, als Alternative zum regulären Fachunterricht die Arbeit an einem Forscher- bzw. Projektthema angeboten. In einer schriftlichen Lernvereinbarung werden hierfür die konkrete zeitliche Freigabe vom regulären Mathematikunterricht wie auch die Inhalte und die Organisation der Forschungs- bzw. Projektarbeit festgelegt (s. Lernvertrag „Drehtür“). In Abhängigkeit von den jeweiligen Bedingungen und Intentionen kann sich die Freistellung vom schulischen Unterricht auf bestimmte Unterrichtsstunden beziehen, die etwa schwerpunktmäßig zum Üben dienen. Oder es sind alle Mathematikstunden innerhalb einer oder mehrerer Wochen davon betroffen. Die Forschungs- oder Projektthemen werden mit den beteiligten Kindern gemeinsam festgelegt. Dafür bieten sich vor allem den schulischen Lernstoff vertiefende oder erweiternde Inhalte an, wie z.B. das Erkunden

- von Biografien berühmter Mathematiker/innen,
- von alternativen bzw. historischen Rechenverfahren,
- von besonderen Verknüpfungen zwischen Mathematik und Kunst bzw. Musik,
- von der historischen Entwicklung der Maßsysteme oder der Kalenderrechnung.

Ein solches Forschungsthema kann von einem kleinen Matheass allein oder von zwei oder mehreren Kindern in einem kleinen „Forschungsteam“ gemeinsam bearbeitet werden. Wesentlich ist hierbei, dass die Kinder weitestgehend selbstständig ihre Erkundungen durchführen und dass sie abschließend eine Ergebnispräsentation vorbereiten, die der gesamten Klasse oder in einer speziellen Veranstaltung einem größeren Publikum vorgestellt wird. Lehrkräften bieten die Forschungs- bzw. Projektarbeiten zum einen die Möglichkeit, die jeweiligen Interessen und Begabungen wie auch die fachlichen, personalen und sozialen Kompetenzen der kleinen Matheasse differenziert zu erfassen. Zum anderen können die Leistungen und das Lernverhalten der Kinder in angemessener Weise bewertet und gewürdigt werden.

Als *besondere Vorzüge* dieser Form des Drehtürmodells lassen sich herausstellen:

- Die beteiligten Kinder können die Ziele und Inhalte sowie die Art und Weise der Bearbeitung der Forschungs- bzw. Projektarbeit mitbestimmen oder sogar überwiegend selbstständig festlegen. Somit bietet die Organisationsform große Potenziale für die Förderung von Selbstkompetenzen der Kinder (vgl. Künne & Sauerhering, 2012).
- Die für das Überspringen einer Klassenstufe im Fach Mathematik genannten Probleme und Grenzen (vgl. 1.3) treffen auf diese Organisationsform nicht zu.
- Mit dem Präsentieren der Forschungs- bzw. Projektergebnisse für die Mitschüler/innen kann die spezielle Fördermaßnahme sinnvoll in den regulären Mathematikunterricht integriert werden. Für die kleinen Matheasse stellt diese Aufgabe meist eine besondere Herausforderung dar, die ihre

Selbstkompetenzen wirksam fördern und ihnen zugleich Anerkennung unter den Mitschülerinnen/Mitschülern bringen kann. Zugleich kann mit dieser speziellen Lernsituation der Mathematikunterricht inhaltlich und methodisch bereichert werden.

Gefahren und Probleme der Forschungs- bzw. Projektarbeit bestehen darin, dass
- die beteiligten Kinder hinsichtlich der selbstständigen und eigenverantwortlichen Bearbeitung einer komplexen Thematik überfordert sein und somit Misserfolgserlebnisse haben können,
- die Organisation einer besonderen Lernumgebung (ggf. verbunden mit einer speziellen räumlichen und technischen Ausstattung und der hiermit verbundenen Aufsichts- bzw. Betreuungspflicht) nicht gewährleistet werden kann,
- die Herausnahme der kleinen Matheasse aus dem regulären Unterricht von ihnen selbst wie auch von den Mitschülerinnen/Mitschülern falsch gedeutet werden könnte (z.B. als ein „Privileg für Eliteschüler/innen“).

1.2 (Selbstverantwortliches) Nutzen außerunterrichtlicher Förderangebote

Die Grundidee dieser Organisationsform besteht darin, dass mathematisch sehr leistungsstarke bzw. begabte Schüler/innen alternativ zum regulären Mathematikunterricht ein außerunterrichtliches Förderangebot nutzen. Das kann z.B. die Teilnahme an einem schulinternen oder schulübergreifenden Enrichmentprojekt, an einem mathematischen Wettbewerb oder an einer Fachvorlesung einer örtlichen Hochschule bzw. Universität sein. Da eine solche Teilnahme meist mit einem Ortswechsel verbunden ist, den die Schüler/innen selbstständig zu meistern haben, bietet sich diese Maßnahme vor allem für ältere Schüler/innen an. Eine weitere Besonderheit ergibt sich daraus, dass die Fördermaßnahme von einer außerunterrichtlichen oder außerschulischen Institution durchgeführt wird. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Ziele, Inhalte und die Organisationsform der Förderung mit der jeweiligen Fachlehrkraft abzusprechen. Zugleich empfiehlt sich das Festlegen eines schriftlichen Lernvertrags. Hinsichtlich des konkreten Zeitraums für die Freigabe vom regulären Mathematikunterricht für die außerunterrichtliche Fördermaßnahme gibt es wiederum sehr unterschiedliche Vereinbarungen (z.B. Freigabe von einer Woche Unterricht für die Teilnahme an einem Wettbewerb oder Freigabe von einer Unterrichtstunde pro Woche für die Teilnahme an einer Fachvorlesung). In einer schriftlichen Lernvereinbarung sollten hierfür die konkrete zeitliche „Befreiung“ vom regulären Mathematikunterricht wie auch die Ziele, die Inhalte und die Organisation der Teilnahme an der außerschulischen Fördermaßnahme festgelegt werden (s. Lernvertrag „Drehtür“).

Hinsichtlich der besonderen Vorzüge sowie der Probleme und Grenzen der Organisationsform gelten in analoger Weise die Einschätzungen für die Arbeit an einem Forschungs- bzw. Projektthema.

1.3 Teilnahme am Mathematikunterricht der nachfolgenden Klassenstufe

Die Kernidee dieser in der Schulpraxis weit verbreiteten Organisationsform besteht darin, dass mathematisch sehr leistungsstarke bzw. begabte Kinder an Stelle des regulären Mathematikunterrichts in der „Stammklasse“ den Fachunterricht in einer nächsthöheren Klassenstufe besuchen. In allen anderen Fächern nehmen sie jedoch am Unterricht in der angestammten Klasse bzw. sozialen Gruppe teil. Beispielsweise bestreitet eine Zweitklässlerin/ein Zweitklässler den Unterricht in Deutsch, Sachunterricht, Musik, Sport usw. in ihrer/seiner Stammklasse, wechselt aber für den Mathematikunterricht in eine Klasse des dritten Schuljahres. Die Organisationsform kann somit als eine zumindest teilweise akzelerative Fördermaßnahme eingestuft werden. Sie kann für verschiedene Zeitspannen (z.B. ein halbes oder ein ganzes Schuljahr oder mehrere Schuljahre) vereinbart werden. Zudem gibt es in der Praxis auch die Variante, dass das Überspringen einer Klassenstufe auf ein weiteres Fach, häufig auf das zweite Hauptfach Deutsch oder auf den naturwissenschaftlichen Unterricht, ausgedehnt wird.

Wesentliche Voraussetzungen für eine erfolgreiche Umsetzung der Fördermaßnahme sind:

- *Auf Seiten der Kinder*: Die betroffenen Schüler/innen beherrschen bereits zumindest grundsätzlich die Lerninhalte des Mathematikunterrichts in der „Stammklasse“. Außerdem sollten sie über die notwendigen personalen und Sozialkompetenzen verfügen, um sich flexibel in den Unterricht der beiden verschiedenen Klassen bzw. Sozialgruppen integrieren zu können.
- *Auf Seiten der Schule*: Der Wechsel in den Mathematikunterricht einer höheren Klasse sollte für die Schüler/innen ohne größeren räumlichen und zeitlichen Aufwand möglich sein. Im Idealfall findet der Mathematikunterricht in der „Stammklasse“ und in der nächsthöheren Klassenstufe an denselben Schultagen wie auch zur jeweils gleichen Zeit in zwei sich in unmittelbarer Nachbarschaft befindlichen Räumen statt.

Besondere Vorzüge der Organisationsform bestehen in Folgendem:

- An Grund- bzw. Volksschulen lässt sich das „Überspringen“ einer Klassenstufe im Fach Mathematik meist problemlos organisieren, sodass für die beteiligten Lehrkräfte im Allgemeinen kein nennenswerter Aufwand erforderlich ist. Auch darüber hinaus erfordert die Umsetzung der Fördermaßnahme zunächst keine spezielle inhaltlich-konzeptionelle Arbeit sowie keine zusätzlichen personellen und räumlichen Ressourcen.
- Neben der Förderung der mathematischen Leistungsfähigkeit bietet die Akzelerationsmaßnahme ein großes Potenzial, die personalen und Sozialkompetenzen der Kinder zu fördern. So können beispielsweise selbstständiges und eigenverantwortliches Lernen oder ein flexibles Sozialverhalten in altersmäßig und kulturell heterogenen Kindergruppen wirksam gefördert werden.

Demgegenüber sind nicht zu unterschätzende *Probleme und Grenzen* zu beachten:

- Schon wenn eine der oben genannten Grundvoraussetzungen nicht gegeben ist, können sich erhebliche Probleme ergeben. So belegen Einzelfälle, dass sich das Überspringen einer Klassenstufe in Mathematik als „Bumerang“ erwies, weil sich die betroffenen Grundschulkinder weder in einer „Stammklasse“ noch in der „Förderklasse“ wohl fühlten und somit kein „soziales Zuhause“ in der Schule erlebten. Folgeanalysen in diesen Fällen ergaben, dass die von der Fördermaßnahme betroffenen Kinder einerseits keine ausreichenden Sozialkompetenzen besaßen und andererseits sich die Mitschüler/innen in beiden Klassen zu wenig um eine soziale Integration der Förderkinder bemühten. Letztlich maßen aber auch die Lehrkräfte diesem Aspekt der Förderung eine zu geringe Bedeutung bei und überließen das Miteinander der Kinder eher dem Zufall.
- Problematisch kann es sein, wenn das Überspringen in Mathematik mit einem Schul- und zugleich einem Ortswechsel verbunden ist, z.B. wenn ein mathematisch begabtes Kind aus einer vierten Grundschulklasse am Mathematikunterricht einer fünften Jahrgangsklasse an einem Gymnasium teilnehmen soll.
- Ein weiteres Problem stellt die objektive, den individuellen Kompetenzen der Förderkinder entsprechende Leistungsbewertung bzw. -benotung dar. Aus der Förderpraxis ist uns z.B. ein Junge bekannt, der als Drittklässler am Mathematikunterricht einer vierten Klasse teilnahm und am Schuljahresende als Abschlussnote in Mathematik eine „Zwei“ erhielt. Da sich die Eltern gemeinsam mit dem Jungen im nachfolgenden Schuljahr für den Verbleib an der Grundschule und somit für das Lernen im vierten Schuljahr entschieden, hatten die Lehrkräfte die Frage nach einer gerechten Leistungsbenotung des Jungen zu klären. Diesbezüglich bestanden ein formal-rechtliches (1) wie auch ein „sozial-gerechtes“(2) und ein fachlich-inhaltliches (3) Problem:

  1. Der Junge hatte bereits eine Abschlussnote für das vierte Schuljahr in Mathematik.
  2. Er kannte alle Lerninhalte und Anforderungen.
  3. Es war unklar, mit welchen mathematischen Themen er nun wie gefördert werden sollte und ob bzw. inwiefern er seine bisherige Note noch verbessern konnte.

2. Methodisch-organisatorische Hinweise für eine „Drehtürmodell-Förderung" mathematisch leistungsstarker oder begabter Schüler/innen

Die Auflistung der Vorzüge wie auch der Gefahren, Probleme und Grenzen der drei Organisationsformen zeigt auf, dass keine Fördermaßnahme im Selbstlauf „funktioniert". Ausgehend von den bisherigen Erläuterungen der Organisationsformen empfiehlt es sich, diese zuvor im Hinblick auf die gesamte kindliche Persönlichkeitsentwicklung gründlich zu prüfen (vgl. dazu den Fragebogen „Entscheidungshilfe" im Anhang). Hierbei sind natürlich die Kinder und ihre Eltern aktiv einzubeziehen. Bei einem außerunterrichtlichen Förderangebot sind zudem Absprachen über die konkreten Inhalte und die Organisation mit den Verantwortlichen dieser Fördermaßnahmen zu tätigen.

Konkrete und erprobte Anregungen für die inhaltliche Gestaltung von Enrichmentmaßnahmen enthalten beispielsweise die „Mathe-für-kleine-Asse"-Bände (s. Literaturverzeichnis). Während der Realisierung einer Fördermaßnahme sollte in regelmäßigen zeitlichen Abständen ein Austausch mit den Schülerinnen/Schülern (und deren Eltern) über eingetretene Wirkungen, über positive Erfahrungen wie auch aufgetretene Probleme und Verbesserungsmöglichkeiten geführt werden.

Bezüglich des Abschlusses der Fördermaßnahme empfiehlt sich zum einen, mit den betroffenen Schülerinnen/Schülern (und den Eltern) eine umfangreiche Auswertung vorzunehmen. Eine wichtige Basis sollten hierbei die vorher vereinbarten Lernverträge sein. Zum anderen sollte geprüft werden, inwiefern eine Ergebnispräsentation in der „Stammklasse" oder zumindest eine Information an die Mitschüler/innen gegeben wird.

Literatur

Fuchs, M. (2004). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Erst- und Zweitklässler). Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.

Fuchs, M. (2009). Mathe für kleine Asse (Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler; Bd. 2). Berlin: Cornelsen.

Fritzlar, T. & Rodeck, K. (2006). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2010). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse". Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern. (Bd. 2 der Reihe Schriften zur mathematischen Begabungsforschung; hrsg. von F. Käpnick). Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer-Spektrum.

Künne, T. & Sauerhering, M. (2012). Selbstkompetenz(-Förderung) in KiTa und Grundschule. Osnabrück: nifbe-Themenheft Nr. 4.

Anhang: Entscheidungshilfe in Bezug auf eine Drehtürmodell-Fördermaßnahme

PROF. DR. FRIEDHELM KÄPNICK
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Entscheidungshilfe in Bezug auf eine Drehtürmodell-Fördermaßnahme

1. Allgemeine Angaben

Name des Kindes: ____________________________________ Datum: ________________

Schule: ____ Klasse: ________________

Anschrift der Eltern/Erziehungsberechtigten:

____

E-Mail: ____ Telefon: ________________

Bereits vorgenommene Fördermaßnahmen:

____

____

2. Kennzeichnung des aktuellen Entwicklungsstandes des Kindes

Grob- und Feinmotorik

____

Händigkeit

____

Allgemeiner Gesundheitszustand

____

Seh- und Hörvermögen

____

Besondere Auffälligkeiten

____

____

2.2 Einschätzung der sozialen und personalen Reifung

Ausprägung des Selbstkonzepts (eigenverantwortliches Lernen, Selbstvertrauen, Selbstwertgefühl, Umgang mit Misserfolgen, Frustrationstoleranz, …)

____

____

Ausprägung der Sozialkompetenzen (Einhalten von Verhaltensregeln, Verhalten gegenüber Gleichaltrigen und Älteren, Empathiefähigkeit, …)

____

____

2.3 Einschätzung der allgemeinen kognitiven Entwicklung

Allgemeine Gedächtnisfähigkeit

____

Sprachliches Entwicklungsniveau

____

____

Entwicklung von Fähigkeiten im Klassifizieren, Abstrahieren, Strukturieren, logischen Schlussfolgern, usw.

____

____

Entwicklung von Wahrnehmungskompetenzen

____

Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens

____

2.4 Einschätzung spezieller begabungsstützender Persönlichkeitsmerkmale

Wissbegier / hohe intellektuelle Neugier

____

Konzentrationsvermögen beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben

____

Selbstständigkeit beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben

____

Ausdauerfähigkeit beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben

____

2.5 Einschätzung des mathematischen Leistungs- bzw. Begabungspotenzials

Zahl- und Rechenkompetenzen (entsprechend den Lehrplanfestlegungen)

____

____

Kompetenzen im Umgang mit Größen, Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

____

____

Kompetenzen im Umgang mit Formen, Lagebeziehungen, Lageveränderungen (Kongruenz-, Ähnlichkeitsabbildungen usw.)

____

____

Problemlösekompetenzen

____

Kompetenzen im Argumentieren, Modellieren und Darstellen mathematischer Sachverhalte

____

____

Kompetenzen im selbstständigen Erkennen, Angeben und im Transfer mathematischer Strukturen

____

____

Kompetenzen im selbstständigen und flexiblen Wechseln der Repräsentationsebenen mathematischer Sachverhalte

____

____

Besondere mathematische Sensibilität (Gefühl für Zahlen und Zahlbeziehungen, für ästhetische arithmetische oder geometrische Muster, für elegante Lösungswege usw.)

____

____

Besondere mathematische Kreativität (Suchen und Finden andersartiger bzw. origineller Lösungswege, divergentes Denken usw.)

____

____

Weitere Besonderheiten

____

____

3 Zusammenfassende Einschätzung / Festlegung einer Fördermaßnahme
(auch unter Berücksichtigung der Lernbedingungen in der jetzigen und der zukünftig geplanten Klasse bzw. Lerngruppe)

____

____

____

Unterschrift: ....

Atelierbetrieb

Der Atelierbetrieb[1] stellt eine Form der Unterrichtsorganisation dar, in der die üblichen Stundenpläne und Klassenzuordnungen für einen bestimmten Zeitraum aufgehoben sind. In dieser Zeit wählen die Schüler/innen ihre Lerninhalte interessengeleitet aus Kursen aus, die von Lehrpersonen, Schülerinnen/Schülern höherer Klassenstufen oder externen Partnern angeboten werden. Auf diese Weise bilden sich spezialisierte Gruppen aus interessierten und/oder begabten Schülerinnen/Schülern, in denen ein selbstständiges Arbeiten auf hohem Niveau möglich ist.

1. Organisationsformen des Atelierbetriebs

Die Durchführung von Atelierbetrieben kann variabel gestaltet werden:

- Die **zeitliche Ausgestaltung** kann zwischen einem Tag und mehreren Wochen variieren. Dabei wird in dieser Zeit die Struktur des Schulalltags ganztägig durchbrochen oder in einem festen Zeitraster wöchentlich in den ansonsten regulären Unterrichtsablauf integriert. Auf der organisatorischen Ebene kann innerhalb dieser Zeit die Festlegung auf ein Atelier oder das Durchlaufen unterschiedlicher Ateliers vorgesehen sein. Dementsprechend empfiehlt es sich, die Zuordnung zu den Themen vorab zu regeln oder ein freies Wechseln zwischen den Ateliers zu ermöglichen.
- **Inhaltlich** kann entweder eine möglichst große Vielfalt von thematisch unterschiedlichen Ateliers (vgl. hierzu die Auflistung von Beispielthemen am Ende des Beitrags) angeboten werden oder es werden die einzelnen Ateliers auf ein vorgegebenes Hauptthema (Motto) ausgerichtet. Dabei kann ein Atelier entweder zuvor von Lehrpersonen inhaltlich und methodisch genau geplant sein oder es regt als vorstrukturierte Lernumgebung zu offenem Arbeiten und Lernen an.
- Die **Auswertung der Lernergebnisse** in den Atelierbetrieben kann in Form eines Abschlussfestes mit einer Posterpräsentation erfolgen. Weitere Möglichkeiten wären: Gestaltung eines Vortrags, einer Zeitung, einer Internetseite oder eines Films.

Am weitesten verbreitet ist die Organisation eines Atelierbetriebes im Umfang von zwei bis drei ganzen Schultagen, für die unterschiedliche Themen angeboten werden. Die Zuordnung zu den Themen erfolgt dabei vorab.

Atelierbetriebe besitzen vielfältige *Potenziale zur mathematischen Begabtenförderung* (vgl. BOLLER & LAU, 2010; KÄPNICK, 2014, 2016; WITTMANN, 1995):

- Sie eignen sich durch die freie Themenauswahl und die dadurch bedingte Anpassung an besondere Interessen sowie an die jeweiligen kognitiven und motivational-volitionalen Lernvoraussetzungen sehr gut für eine individuelle und bereichsspezifische Förderung mathematisch begabter Schüler/innen. Lernen kann somit adaptiv den speziellen Bedürfnissen kleiner Matheasse Rechnung tragen.
- Sie können stärker als der Regelunterricht zu aktiv-entdeckendem Lernen anregen, weil Schüler/innen sich – an ihre Vorkenntnisse anknüpfend – Themen ganzheitlich erschließen können. Zugleich haben die kleinen Matheasse hierbei viele Freiräume für eine Eigendynamik ihrer Lernwege und mit Schülerinnen-/Schülerfehlern kann konstruktiv umgegangen werden.
- Atelierbetriebe bieten Lehrkräften günstige Möglichkeiten für eine prozessbezogene Diagnostik mathematischer Begabungen, z.B. beim Erkennen von Problemlösestilen.

1 Atelierbetriebe werden auch als Projekttage bzw. Projektwochen bezeichnet.

Gleichzeitig muss auf *Voraussetzungen, Probleme und Grenzen* dieser Organisationsform hingewiesen werden, denn wie auch bei anderen Formen des Unterrichts garantiert die Organisationsform nicht automatisch die Verwirklichung der gesetzten Ziele:

- Eine Grundvoraussetzung für einen gelingenden Atelierbetrieb ist, dass die Schüler/innen aus den Projektbeschreibungen hinreichend über die Zielsetzungen informiert werden und darin ein ihren Interessen und Begabungen adäquates Angebot finden.
- Organisatorische Rahmenbedingungen, wie eine gleichmäßige Verteilung der Teilnehmerzahlen oder die Notwendigkeit einer frühzeitigen Zuordnung, können die Offenheit des Lernangebots einschränken.
- Ein Problem könnte darin bestehen, dass Schüler/innen Themen auswählen, die nicht ihren Interessen und Begabungen entsprechen. Dafür kann es verschiedene Gründe geben, wie z.B. eine falsche Einschätzung des eigenen Interesses oder eine generell unzureichend entwickelte Selbstkompetenz von Kindern. Aber auch soziale Aspekte wie die Gruppenzugehörigkeit, gesellschaftliche Normen oder attraktive Konkurrenzangebote können die Wahl eines zu den eigenen Begabungen und/oder Interessen passenden Themas verhindern.
- Durch eine zu starke Lenkung der Projekte und/oder durch geschlossene Aufgabenformate könnte die gewünschte Adaption an die individuellen Lernniveaus der kleinen Matheasse sowie kreatives Arbeiten erschwert oder gar verhindert werden.

2. Methodisch-didaktische und inhaltliche Hinweise für die Gestaltung eines Ateliers zur Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler

Für eine adäquate Förderung mathematisch begabter Schüler/innen sind die Wahl geeigneter Themen und eine gründliche didaktisch-methodische Planung des Aufgabenarrangements unter Berücksichtigung diverser Vorüberlegungen unerlässlich (siehe KÄPNICK, 2001, 2003):

- Das Thema soll so gewählt werden, dass es eine reichhaltige mathematische Substanz bietet und zu kreativen sowie vielfältigen Entdeckungen einlädt. Es sollte eine natürliche Differenzierung vom Kinde aus ermöglichen und auf unterschiedliche Vorkenntnisse und Begabungspotenziale der Kinder eingehen. Dies kann durch:
    - die Offenheit der Aufgaben bezüglich der Wahl der Lösungswege,
    - die Wahl der Hilfsmittel und
    - die Möglichkeiten der Ergebnisdarstellung erreicht werden.
- Die konkreten mathematischen Aktivitäten, die beim Bearbeiten des Ateliers möglich sind, sollen antizipiert und mathematisch-logisch strukturiert werden.
- Die möglichen Aufgabenaktivitäten sollen individuell an bestehende Vorkenntnisse verschiedener Kinder anknüpfen können.
- Es soll das Interesse des Kindes an der Aktivität geweckt und eine intrinsische Motivation aufgebaut werden.
- Mögliche kindliche Sinnkonstruktionen beim Bearbeiten des Ateliers sollen berücksichtigt werden.
- Bei der methodischen Planung sollten günstige soziale Lernformen, geeignete Arbeitsmittel und eine angemessene zeitliche Organisation gefunden werden.
- Erfahrungen aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse“ zeigen, dass sich der Einstieg über eine Problemaufgabe bewährt hat, die zur weiteren Beschäftigung mit tiefergehenden Fragestellungen einlädt. Die Ergebnisse dieser (anschließenden) Phase „Forschenden Lernens“ werden am Ende der Arbeit den Mitschülerinnen/Mitschülern vorgestellt.

Themenvorschläge für Ateliers zur mathematischen Begabtenförderung, die sich insbesondere für die Klassenstufen 5 bis 10 anbieten:

- Mathematik im Spiel
- Parkettierung
- Graphentheorie
- Brückenbau
- Die Zahl Pi
- Fraktale
- Mathematik und Kunst
- Mathematik ist überall
- Bedeutende Mathematiker und ihre Entdeckungen
- Beweisen in der Mathematik

Literatur

Boller, S. & Lau, R. (2010). Wozu ein Praxishandbuch zur inneren Differenzierung in der Sekundarstufe II. In S. Boller & R. Lau (Hrsg.), Innere Differenzierung in der Sekundarstufe II. Ein Praxishandbuch für Lehrer/innen (S. 9-12). Weinheim: Beltz.

Wittmann, E. (2000). Aktiv-Entdeckendes Lernen. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), Mit Kindern rechnen (S. 10-41). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Käpnick, F. (2001): Mathe für kleine Asse 3/4, Empfehlungen zur Förderung mathematisch begabter und interessierter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Band 1. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2003): Aufgabenformate für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Grundschulkinder. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (S. 169-181). Offenburg: Mildenberger.

Käpnick, F. (2014): Mathematische Talente erkennen und fördern. In M. Stamm (Hrsg.), Handbuch Talententwicklung (S. 537-547). Bern: Hans Huber.

Käpnick, F. (2016): Mathematiklernen in der Grundschule. Heidelberg: Springer.

Portfolios

Portfolios sind Selbstreflexionen der Schüler/innen über ihr Lernen in Form eigenverantwortlich geführter Sammlungen von Schüler/innenarbeiten. In diesen Sammlungen können die Schüler/innen ihre Anstrengungen, ihre Lernresultate und -fortschritte auf einem oder mehreren mathematischen Gebieten selbst dokumentieren. Das Anfertigen und begründete Auswählen von geeigneten Arbeiten ist also Aufgabe der Schülerin bzw. des Schülers! Dementsprechend kann mit Portfolios der didaktischen Leitidee Rechnung getragen werden, Schüler/innen als aktive Mitgestalter/innen und Mitverantwortliche ihres Lernens zu befähigen.

In der konkreten Umsetzung bedeutet dies, alle Schüler/innen vom ersten Schultag an kontinuierlich an die Eigenverantwortlichkeit heranzuführen. Dies ist u.E. wichtig, weil die Befähigung zur Selbstreflexion über das eigene Lernen eine sehr anspruchsvolle Aufgabe für Schüler/innen ist, die sie im Allgemeinen erst im Ergebnis eines längeren kontinuierlichen Entwicklungsprozesses selbstständig meistern können. Aus der Perspektive der Begabungsdiagnostik bieten Portfolios Lehrkräften zugleich sehr gute Möglichkeiten, individuelle Lern-, Denk- und Problemlösestile, bevorzugte Aufgabenthemen und -formate wie auch Lernfortschritte eines kleinen Matheasses zu erfassen. Davon ausgehend können Fördermaßnahmen so gestaltet werden, dass sie den Interessen, Neigungen oder inhaltlichen Präferenzen eines kleinen Matheasses entsprechen.

Im Folgenden werden konkrete Empfehlungen für zwei verschiedene Formen von Portfolios im Mathematikunterricht (Schüler/innensammelmappen und Checklisten) gegeben. Beide Formate stellen kontinuierliche Portfoliozusammenstellungen dar und dienen somit der periodischen Reflexion.

1. Portfolios in Form von Schüler/innensammelmappen

Hinweise zum Erstellen von Schüler/innensammelmappen:

- Generell sollten die Schüler/innen selbst Ideen für ihre Sammelmappen entwickeln und umsetzen, sodass sie diese als „Eigenproduktionen" auffassen und sie sich mit ihnen identifizieren können.
- Eine Schüler/innensammelmappe sollte neben einem Titelblatt vor allem Arbeiten enthalten, die eine Schülerin bzw. ein Schüler im regulären Mathematikunterricht oder in außerunterrichtlichen Förderprojekten angefertigt hat. Die Arbeiten werden in der Rückschau auf eine Lernetappe selbst ausgewählt, sie spiegeln ihre/seine Kompetenzen besonders gut wider.
- Hinsichtlich der Darstellung von Aufgaben, Lösungswegen und Lösungen sollte den Schülerinnen/Schülern ein größtmöglicher Freiraum gegeben werden. Ebenso sollten die Schüler/innen ihre Sammelmappen eigenverantwortlich gestalten und pflegen.
- In einer einführenden Stunde könnte die Lehrkraft den Kindern zunächst die Funktion und die Anlage von Portfolios erläutern. Die Schüler/innen sollten gleichzeitig angeregt werden, eigene Ideen in die Themenauswahl und die Gestaltung ihrer Portfolios einzubringen. Später empfiehlt es sich, etwa alle acht Wochen eine Portfoliostunde durchzuführen, in der die Kinder ihre individuellen Portfolios vorstellen und gemeinsam mit der Lehrkraft diskutieren.
- Die Schüler/innen könnten Sammelmappen zu verschiedenen mathematischen Themen erstellen, wie z.B. zu „Zahlen und Rechenwelten", „Formenwelten", „Schätz- und Größenaufgaben", „Meine Lieblingsaufgaben", „Meine Lieblingszahl" oder „Meine schönsten Aufgaben". Insbesondere Sammelmappen zu „freien Themen" (wie z.B. „Meine Lieblingsaufgaben") geben einer Lehrkraft Einblicke in inhalt-

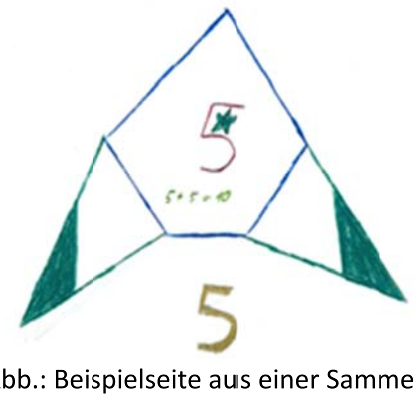


Abb.: Beispielseite aus einer Sammelmappe eines Drittklässlers zum Thema „Meine Lieblingszahl" liche mathematische Präferenzen einzelner Schüler/innen wie auch in deren individuelle Denk- und Darstellungsstile oder (Selbst-)Ansprüche.

Zu Letztgenanntem ist zu beachten, dass mathematisch begabte Kinder auch eine besondere mathematische Sensibilität besitzen. Dies spiegelt sich häufig in speziellen Zahlgefühlen und-auffassungen wider (vgl. nebenstehendes Beispiel). Tom kommentierte seine Zeichnung so: *„Meine Lieblingszahl ist 5, weil sie eine starke Zahl beim Rechnen ist. Das Doppelte von 5 ist 10 und wir haben ja ein Zehnerzahlsystem. Und dann ist ein Fünfeck eine tolle Figur, nicht so einfach wie ein Dreieck oder Viereck, aber trotzdem total symmetrisch."* Der Kommentar deutet darauf hin, dass der Junge gern und geschickt anspruchsvolle Aufgaben rechnet und hierbei insbesondere Rechenbeziehungen mit den Zahlen 10 und 5 effektiv nutzt. Analoges lässt sich aus seinem Kommentar zum Fünfeck erkennen und eventuell weiß bzw. ahnt Tom sogar, dass das regelmäßige Fünfeck in der Geschichte der Mathematik eine besondere Bedeutung spielt, als „Endlosfigur": Durch das Einzeichnen der Diagonalen erhält man im Inneren des Fünfecks wieder ein regelmäßiges Fünfeck; und dieser Prozess kann (theoretisch) unendlich viele Male wiederholt werden. Zugleich lassen sich in der Figur viele Symmetrien entdecken und interessante Querbezüge zum Goldenen Schnitt oder zur Konstruktion von Sternfiguren herstellen. Somit lässt sich an diesem simplen Beispiel erkennen, welches vielschichtige Diagnosepotenzial einem Portfolio inne wohnt. Dies setzt aber zugleich eine besondere fachliche Kompetenz voraus, welche auch für die effektive Förderung der individuellen Begabungspotenziale der Kinder unerlässlich ist.

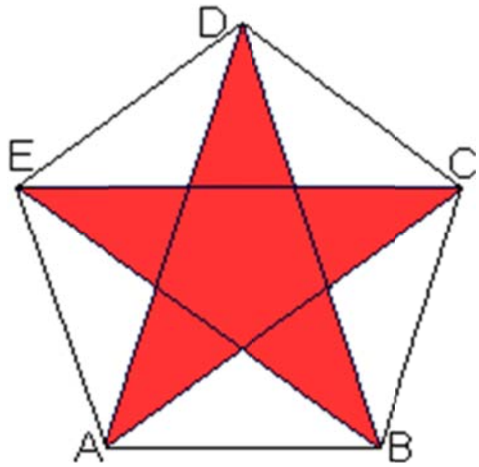


Abb.: Regelmäßiges Fünfeck als Endlosfigur

2. Portfolios in Form von Schüler/innen-Checklisten

Schüler/innen-Checklisten können als eine besondere Form von „Beurteilungsportfolios" eingesetzt werden. Entsprechend der Leitidee, Schüler/innen zu aktiven Mitgestalterinnen/-gestaltern und Mitverantwortlichen ihres Lernens zu befähigen, sollten die Schüler/innen die Checklisten in „Eigenregie" führen. Für die Nutzung solcher Checklisten könnten folgende Hinweise hilfreich sein:

- Die Lehrkraft könnte den Schülerinnen/Schülern die Ziele und Inhalte der Checklisten in einer gemeinsamen Einweisung an konkreten Beispielen erläutern.
- Eine effektive Darstellungsform für Checklisten sind Tabellen mit einer einheitlichen und leicht erfassbaren Struktur (vgl. unteres Beispiel).
- Die Kinder sollten von Anfang an ihre Selbsteinschätzungen aus einer kompetenzorientierten (und nicht defizitorientierten) Perspektive vornehmen. Dementsprechend könnten in den Tabellen der Checklisten Bewertungsmuster wie *„Das kann ich schon!"* oder *„Ich bin auf dem Weg!"* genutzt werden (vgl. Beispiel weiter unten).
- In Abhängigkeit vom individuellen Entwicklungsstand können die Schüler/innen selbst entscheiden, ob sie in einer Tabellenspalte ein Kreuz malen oder ob sie ihre Selbstreflexionen mithilfe eines konkreten Beispiels oder einer verbalen Formulierung dokumentieren.
- Die Checklisten sollten auch jeweils freie Spalten enthalten, in denen die Kinder selbst Lernthemen ergänzen können, die sie für wichtig erachten.

- Außerdem bietet sich auch eine zusätzliche Zeile für die Lehrkraft (unterhalb der Tabelle) an, in der sie einen anerkennenden Kommentar ergänzen kann.
- Die Schüler/innen sollten die Checklisten zumindest einmal pro Halbjahr ausfüllen.
- Die Auswertung der Schüler/inneneinschätzungen sollte vor allem individuell erfolgen. Die Lehrkraft kann darüber hinaus der gesamten Lerngruppe allgemeine Trends, besonders gute Leistungen u.Ä.m. vorstellen.

Mit Blick auf das Erfassen und Fördern mathematischer Begabungen bietet sich insbesondere eine Checkliste zu prozessbezogenen Kompetenzen an: Diese umfasst mathematisch substanzielle bzw. begabungsrelevante Leistungen, wie das Beschreiben und Begründen von Lösungen, das Erfinden von Aufgaben oder das Fortsetzen von Rechenmustern. Ergänzend könnte eine Checkliste zu solchen mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen eingesetzt werden, bei der Schüler/innen ihre Kompetenzen selbst einschätzen können.

Literatur

Eisenbart, U., Schelbert, B. & Stokar-Bischofberger, E. (2012). Stärken entdecken – erfassen – entwickeln. Das Talentportfolio in der Schule (2. Aufl.). Bern: Schulverlag plus AG.

Fischer, C. (2004b). Begabtenförderung als Herausforderung für die Schulentwicklung. *Journal für Begabtenförderung*, 3. Jg., H. 1, 7-14.

Renzulli, J. S. (2004). Eine Erweiterung des Begabungsbegriffs unter Einbeziehung co-kognitiver Merkmale. In C. Fischer & F. J. Mönks (Hrsg.), Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung (S. 54-82). Münster: LIT.

Renzulli, J. S., Reis, S. M. & Stedtnitz, U. (2001). Begleitband zum schulischen Enrichment Modell SEM. Trainingsaktivitäten, Vorlagen, Unterrichtsmaterialien. Aarau: Sauerländer.

Anhänge:

Checkliste: Beschreiben, Begründen, Probleme lösen …

Name: ____ Datum: ____________ Klasse: ____

Lernanspruch	Das kann ich schon!	Ich bin auf dem Weg!
mathematische Zeichen und Wörter richtig verwenden		
Lösungswege beschreiben		
Lösungen übersichtlich darstellen		
Lösungen richtig begründen		
Erklärungen von anderen verstehen		
Rechen- und Figurenmuster fortsetzen		
mit anderen Kindern gut zusammenarbeiten		
Aufgaben erfinden		
schwierige Aufgaben (Probleme) lösen		
Das mag ich besonders:		

Prof. Dr. Friedhelm Käpnick
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Checkliste: Meine besonderen mathematischen Stärken

Name: ______________________________________ Datum: ____________ Klasse: ____

Lernanspruch	Das kann ich schon!	Ich bin auf dem Weg!
sehr gern knifflige Probleme lösen		
sich beim Lösen schwieriger Auf-gaben sehr anstrengen		
sich viele mathematische Zeichen, Wörter und Beziehungen gut mer-ken		
ein besonderes Gefühl für schöne mathematische Darstellungen haben		
Kreative Ideen beim Lösen von Problemen entwickeln		
Rechen- und Figurenmuster er-kennen und korrekt angeben		
Rechen- und Figurenmuster fort-setzen und auf andere Aufgaben übertragen		
Texte in Tabellen, Grafiken oder Formeln übertragen		
Das mag ich besonders:		

Differenzierte Lernziele und Lernprodukte im regulären Mathematikunterricht

1. Eine alltägliche Herausforderung für Lehrkräfte im Mathematikunterricht

Als Thema für die nächste Mathematikstunde in seiner fünften Jahrgangsklasse hat Herr Meier „Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene“ bestimmt. Beim Planen legt der Lehrer die folgenden inhaltlichen Schwerpunkte für die Stunde fest: Erkennen und zeichnerisches Darstellen von zueinander parallelen sowie sich schneidenden und im Sonderfall zueinander senkrechten Geraden. Dann plant er einzelne Lernsequenzen, bestimmt konkrete Aufgaben, Nutzungsmöglichkeiten von Lernmitteln und Medien, legt die Zeitplanung fest usw. Zudem überlegt er, wie er den sehr unterschiedlichen Lernpotenzialen der Schüler/innen in der Unterrichtsstunde gerecht werden kann. Dabei muss er z.B. beachten, dass Paul nach wie vor die Begriffe „parallel zueinander“, „senkrecht zueinander“ sowie „Strecke“ und „Gerade“ häufig durcheinander bringt, Lea noch unsicher im Zeichnen mit Lineal, Dreieck und Zirkel ist, Tom zwar oft originelle Lösungsideen hat, es ihm jedoch schwer fällt, seine Lösungen übersichtlich darzustellen oder dass Anna vor allem bei Forscheraktivitäten „aufblüht“, vielfach allgemeine Lösungsmuster entdeckt und diese in der Regel auch korrekt angeben kann usw.
Diese (hier fiktiv beschriebene) Planungstätigkeit verdeutlicht exemplarisch die alltäglichen Herausforderungen für Mathematiklehrkräfte beim Umgang mit der großen Heterogenität der Schüler/innen einer Klasse.

2. Didaktische Aspekte der Nutzung differenzierter Lernziele und Lernprodukte für kleine Matheasse im regulären Mathematikunterricht

Ein wirksamer Lösungsansatz für die beschriebene Herausforderung, vor allem in Bezug auf sehr leistungsfähige bzw. besonders begabte Kinder, kann darin bestehen, dass die Schüler/innen mit Unterstützung ihrer Lehrkraft differenzierte Lernziele bestimmen und dass sie dann für die Umsetzung der Ziele in ausreichendem Maße herausfordernde Lerngelegenheiten im Unterricht erhalten. Die individuell bestimmten Lernziele können sich dabei auf verschiedene Zeitspannen beziehen, auf eine Unterrichtsstunde, auf eine Woche, einen Monat oder auf ein Schulhalbjahr bzw. ein ganzes Schuljahr (vgl. nebenstehendes Beispiel).
Eine besondere Organisationsform hierfür stellt der *„Zwei-Phasen-Unterricht“* dar. Er bietet Lernenden zwei Varianten der Lernstofferfassung als Wahlmöglichkeiten an: ein selbstständiges oder ein lehrerzentriertes Erarbeiten. Hierzu werden zunächst die Lernziele für die jeweilige Einheit bestimmt. Dann können sich die Schüler/innen für eine der angesprochenen Wahlmöglichkeiten entscheiden. Für kleine Matheasse bietet sich im regulären Unterricht vor allem das selbstständige Erarbeiten eines Lernthemas an. Nach dieser eigenständigen Lerntätigkeit folgt das Präsentieren, Diskutieren und gemeinsame Analysieren der Lernergebnisse mit der Lehrkraft, während die anderen Kinder der Lerngruppe das gemeinsam Erarbeitete üben bzw. anwenden. Danach sollten sich alle Schüler/innen im Plenum über ihre gewonnenen Lernergebnisse austauschen und über ihre Lernerfahrungen reflektieren. Auf diese

> Ich nehme mir vor, …
> - alle möglichen Lagebeziehungen von bis zu mindestens 6 Geraden zu entdecken,
> - dass ich, wenn ich eine Formel oder eine Regel entdecke, sie auch richtig aufschreibe und sie begründen kann,
> - meine Lösungen übersichtlich und vollständig aufzuschreiben,
> - mich mehr als bisher im Schuljahr an den Auswertungsgesprächen zu beteiligen.

Abb. 1: (Fiktives) Beispiel individuell bestimmter Lernziele eines kleinen Matheasses zum Erforschen von „Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene“

Weise können die Schüler/innen schrittweise ihre individuell bevorzugten Lernstile erkennen und eigenverantwortliches Lernen entwickeln (vgl. hierzu auch den ÖZBF-Postertext zum „*Formativen Assessment*“).
Für eine gelingende Nutzung differenzierter Lernziele ist es wichtig, dass die Kinder von Anfang an eigen- bzw. mitverantwortlich eingebunden werden. Auf diese Weise können sie kontinuierlich lernen, sich realisierbare, gut einschätzbare und zugleich differenzierte Ziele zu bestimmen, sich mit diesen zu identifizieren und selbstreflektierend eigene Lernergebnisse, -fortschritte wie auch -probleme objektiv einzuschätzen. Um diese Selbstkompetenzen wirksam zu fördern, empfehlen sich Portfoliosammlungen für jedes kleine Matheass, in denen es seine Lernprodukte systematisch festhält (vgl. hierzu Käpnick, 2017). In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik haben sich für solche individuellen Lernprodukte die Begriffe „Eigenproduktionen“ bzw. „Eigenkonstruktionen“ etabliert (vgl. Selter, 2005). Unter einer „Eigenproduktion“ werden dabei – vereinfacht ausgedrückt – alle Aktivitäten verstanden, bei denen die Schüler/innen selbst Aufgabenstellungen erfinden. Mit Eigenkonstruktionen werden informelle Lösungsstrategien und -wege bei komplexeren Aufgabenstellungen bezeichnet (Selter, 1993, S. 30-31).
Bei der Erstellung der „kindlichen Eigenproduktionen und -konstruktionen“ sollte die Lehrkraft die differenzierten Lernziele gemäß den individuellen Potenzialen der Schüler/innen berücksichtigen. Zudem werden dafür in der Literatur relativ übereinstimmend folgende vier Kriterien genannt:

- Möglichst alle Kinder haben die Chance, sich mit der Aufgabe erfolgreich auseinanderzusetzen.
- Der Aufgabeninhalt ist für möglichst alle Kinder interessant bzw. motivierend.
- Der Aufgabeninhalt weist eine gewisse fachliche Substanz, Vielfältigkeit und Offenheit auf.
- Es besteht eine Offenheit bzgl. der Wahl von Lösungswegen, von Hilfsmitteln und der Lösungsdarstellung. (Käpnick, 2014, S. 125)

Solche Aufgaben werden entsprechend den genannten Kriterien häufig als *offene, mathematisch substanzielle Aufgaben* oder *Aufgabenfelder* bezeichnet. Vom Charakter her sind offene Aufgaben tendenziell Problemaufgaben. Da das Problemlösen eine hochkomplexe und zugleich sehr individuell geprägte Lerntätigkeit ist, kann diese auch nur eingeschränkt geplant werden. Die Lehrkraft sollte hierbei als Lernbegleiter/in fungieren. Dazu gehört es:

- Vertrauen in die Problemlösekompetenzen aller Kinder (auch von Kindern mit Rechenproblemen) zu haben,
- die „Kunst der pädagogischen Zurückhaltung“ zu beherzigen,
- Kindern zu ermöglichen, selbst über ihre Organisationsform, über die Nutzung von Arbeitsmaterialien, über ihren Lösungsweg, die Lösungsdarstellung usw. zu entscheiden,
- Kindern beim Entwickeln ihrer individuell bevorzugten Problemlösestile zu helfen,
- ausreichend Zeit für die Phase der Problembearbeitung sowie der Ergebnispräsentation und -diskussion einzuplanen (vgl. ebd., S. 124-125).

Die aufgelisteten Anforderungen an eine Lehrkraft erscheinen sehr plausibel. In der Schulpraxis werden sie u. E. jedoch nicht immer umgesetzt. So erleben wir bei Hospitationen immer wieder, dass Lehrkräfte oder Lehramtsstudierende Kindern nicht genügend Zeit zum Finden einer Lösungsidee lassen und vorschnell unnötige Hilfen geben oder dass Lehrkräfte oft wenig Vertrauen in Problemlösekompetenzen von Kindern mit Rechenproblemen haben.
Hinsichtlich des Erstellens von Eigenproduktionen und -konstruktionen durch die Schüler/innen ist zu beachten, ihnen hierfür möglichst viele Freiräume zu lassen. Auf diese Weise können die Kinder ihre individuellen Lösungsideen, ihre subjektiv bevorzugten Denk- und Lernstile umsetzen und diese stetig weiterentwickeln, was letztlich zur Stärkung ihrer Selbstkonzepte beiträgt. Für eine Lehrkraft ergeben sich zugleich sehr gute Möglichkeiten, die (Selbst-)Ansprüche wie auch individuelle Denk- und Dar-

stellungsstile von Schülerinnen/Schülern zu erkennen. Dementsprechend sollte eine Lehrkraft auch ausreichend Zeit für eine gründliche Analyse der kindlichen Lernprodukte einplanen. Da die Schüler/innenlernprodukte nicht immer leicht und eindeutig verständlich sind, ist ggf. auch ein klärendes Gespräch mit dem betroffenen Kind empfehlenswert.

3. Authentische Beispiele für individuell verschiedene Lernprodukte von kleinen Matheassen zum Thema „Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene“ Im Folgenden werden einige authentische Lernprodukte von Kindern aus dem Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“ (vgl. Käpnick, 2010) zum Erforschen von möglichen Schnittpunktzahlen bei verschiedenen Anzahlen von Geraden in der Ebene vorgestellt, wodurch die unter Punkt 2 geschriebenen didaktisch-methodischen und diagnostischen Aspekte verdeutlicht werden. Die kleinen Matheasse eines vierten Schuljahres konnten dabei in einer ca. 30-minütigen Forscherarbeit das Problemfeld erkunden. Dabei hatten sie jegliche Freiräume hinsichtlich der Wahl von Lern- und Darstellungsmitteln, der Wahl von Lösungswegen, der sozialen Lernform und der Ergebnispräsentation. Nikitas Eigenproduktion (s. Abb. 2) lässt erkennen, dass der Junge versuchte, systematisch alle möglichen Lagebeziehungen von vier Geraden in der Ebene zusammenzustellen. Hierbei ging er dennoch etwas sprunghaft vor. So begann er oben links mit vier zueinander parallelen Geraden, die null Schnittpunkte haben, zeichnete dann aber nicht vier Geraden mit einem, sondern mit fünf bzw. sechs Schnittpunkten. Außerdem stellt sich die Frage, warum er in der dritten Reihe zwei Lagekonstellationen mit jeweils drei Geraden zeichnete. Interessant und „nachfragenswert“ ist zudem seine Zeichnung mit nur (scheinbar) einer Geraden und null Schnittpunkten. Hier könnte es sein, dass Nikita den Sonderfall von identischen bzw. aufeinanderliegenden Geraden in der Ebene herausstellen wollte. Felix fokussierte sich bei seinen zeichnerischen Darstellungen ebenfalls auf Lagemöglichkeiten von vier Geraden (vgl. Abb. 3). Dies sind aber offenbar nur willkürlich gewählte Beispiellösungen, denn im Unterschied zu Nikita ging Felix einen bedeutenden Schritt weiter, indem er seine Entdeckungen systematisch in einer selbst entwickelten Matrix-Tabelle zusammenstellte. Diese Leistung von Felix weist auf zwei wesentliche bereichsspezifische Merkmale mathematischer Begabung hin: auf die Fähigkeit, allgemeine Strukturen zu erkennen und diese darzustellen und auf die Fähigkeit des selbstständigen Wechselns der Repräsentationsebenen (Käpnick, 2009, S. 7-11). Diese Kompetenzen sind auch sehr gut in den Schüler/innenprodukten von Darja und Marcel erkennbar (vgl. Abb. 4 und 5).

Zugleich weisen Darjas und Marcels Eigenproduktionen deutliche individuelle Unterschiede auf. So sticht die sehr übersichtliche und streng systematische Lösungsdarstellung von Darja heraus, die einen dementsprechenden generellen Lernstil des Mädchens vermuten lässt. Ihr Anspruch auf vollständige und gründlich durchdachte Lösungen spiegelt sich z.B. darin wider, dass Darja zuerst auch den Sonderfall „0 Geraden“ berücksichtigt. „Passend“ zu ihrem individuellen Lernstil hat das Mädchen ebenso im Unterschied zu Felix und Marcel die Kopfzeilen ihrer Tabelle betitelt.

Im Vordergrund von Marcels Lernprodukt steht ebenfalls eine tabellarische Übersicht über alle möglichen Lagekonstellationen von vier Geraden in der Ebene. Die unsystematisch erscheinenden Skizzen spezieller Lagen von Geraden am rechten Rand seines Blattes wirken auf den Betrachter lediglich als exemplarische Illustrationen. Seine tabellarische Übersicht über alle Lagemöglichkeiten von Geraden in der Ebene hat Marcel dagegen gründlich durchdacht, wenngleich sein „System“ nicht einfach zu verstehen ist. So musste Marcel beim Vorstellen seines Lernproduktes auch erst einmal allen sein „Grundmuster“ erklären. Marcel, der beim mathematischen Problemlösen meist nach einer „perfekten Lösung“ sucht, fand auch für die „Geraden-Aufgabe“ eine ihn beglückende „Superlösung“: Er unterschied drei verschiedene Lagen von Geraden, und zwar „vertikal, schräg und horizontal“ (was er mit den drei verschieden gerichteten Strichen kennzeichnete). So bedeutet seine linke obere Zeile: Wenn vier Geraden gleichgerichtet vertikal (also parallel) liegen und keine Gerade „schräg“ oder „horizontal“ gezeichnet wird, dann gibt es null Schnittpunkte. Entsprechend seinen definierten drei verschiedenen Lagen von Geraden in der Ebene fasst Marcel in der Tabelle alle möglichen Lagekonstellationen systematisch dar – und war überzeugt davon, eine „perfekte Lösung" ermittelt zu haben. Er blieb übrigens bei seiner Lösung, obwohl ihm die Mitschüler/innen andersartige Lagen von Geraden zeigten. Sogar die beispielhafte Demonstration der Lehrkraft von anderen als die drei von Marcel festgelegten Lagen von Geraden konnte den Jungen nicht von seinem „perfekten Lösungsmuster" abbringen. Erst nachdem sich das kleine Matheass zuhause sein Lernprodukt nochmals sehr gründlich ansah und es kritisch durchdachte, erkannte er den Fehler in seinem „System". Insofern kann eine kindliche Eigenproduktion auch noch in späteren Lern- bzw. Analysephasen sehr hilfreich für eigene Erkenntnisgewinne sein.

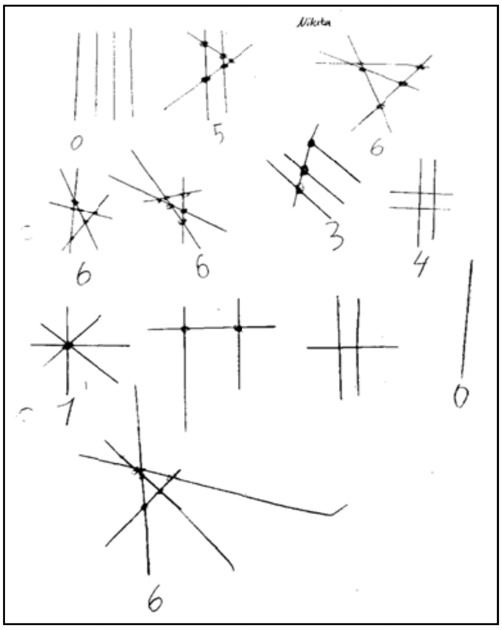


Abb. 2: Nikitas Eigenproduktion zum Erforschen des Aufgabenfeldes „Schnittpunkte von Geraden“

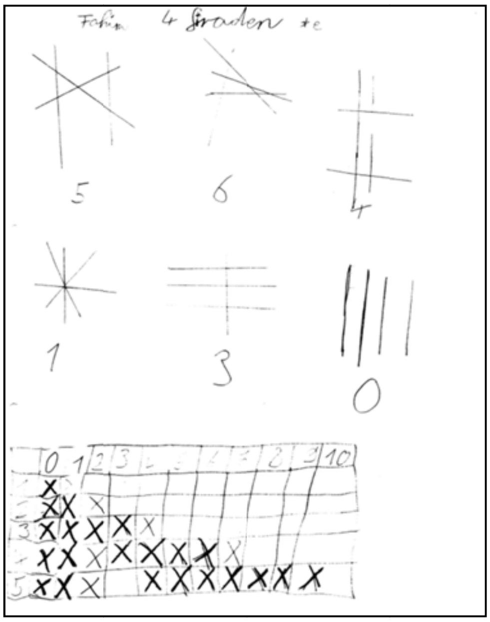


Abb. 3: Felix‘ Eigenproduktion zum Erforschen des Aufgabenfeldes „Schnittpunkte von Geraden“

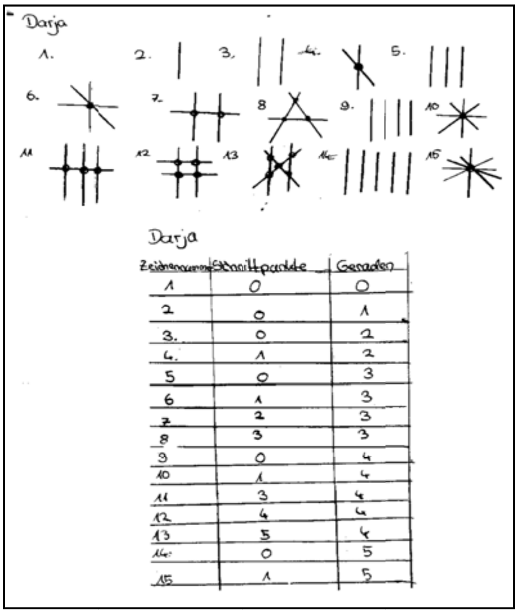


Abb. 4: Darjas Eigenproduktion zum Erforschen des Aufgabenfeldes „Schnittpunkte von Geraden“

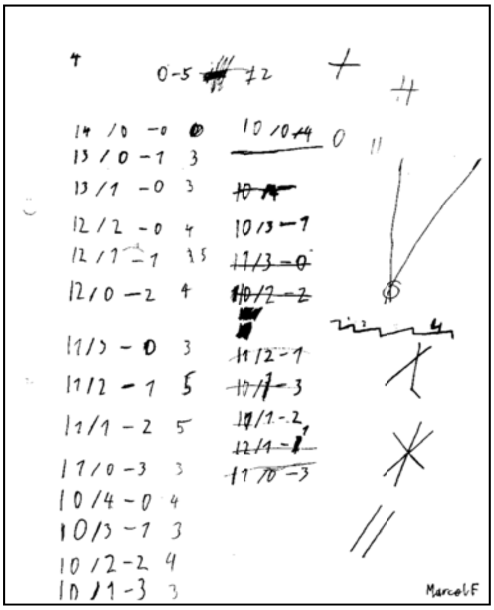


Abb. 5: Marcels Eigenproduktion zum Erforschen des Aufgabenfeldes „Schnittpunkte von Geraden“

Literatur

Fuchs, M. & Käpnick, F. (Hrsg.) (2009). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler (Bd. 2). Berlin: Volk und Wissen.

Fuchs, M. (2006). Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Berlin: LIT.

Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer Spektrum.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2016). Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2010). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern. Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (2017). Portfolios. In: Wege in der Begabungsförderung in Mathematik. Salzburg: ÖZBF.

Käpnick, F. (2017). Formatives Assessment – ein wertvolles didaktisches Mittel zum Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder. Wege in der Begabungsförderung in Mathematik. Salzburg: ÖZBF.

ÖZBF (2017). Wege in der Begabungsförderung (2016). Salzburg: ÖZBF.

Selter, Ch. (1993). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Peer-Teaching – eine spezielle Organisationsform für die Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler

1. Grundidee und besondere Lernpotenziale von Peer-Teaching im Mathematikunterricht

Die *Grundidee von Peer-Teaching* (bzw. Lernen durch Lehren) besteht darin, dass Schüler/innen im Unterricht (zeitweilig) die Lehrer/innenrolle übernehmen. Diese Differenzierungsform bietet sich im Mathematikunterricht vor allem für sehr leistungsstarke bzw. besonders begabte Schüler/innen an, die auf diese Weise ihre überdurchschnittlichen Fachkompetenzen oder ihr Spezialwissen einbringen und somit den Unterricht inhaltlich und zugleich didaktisch bereichern können. Als weitere *besondere Lernpotenziale* für die Schüler/innen, die in die Lehrer/innenrolle schlüpfen, lassen sich hervorheben:

- Die Schüler/innen sind gefordert, sich sehr intensiv mit den jeweiligen Sachthemen auseinanderzusetzen. Auf diese Weise können sie ihr Fachwissen vertiefen und erweitern.
- Die Schüler/innen sind (in der Regel) sehr motiviert und erleben die spezielle Herausforderung im Allgemeinen als persönliche Anerkennung (Förderung des Selbstwertgefühls).
- Die Schüler/innen sind gefordert, sich auf ihre Mitschüler/innen einzustellen (Förderung von Sozialkompetenzen).
- Da die Schüler/innen ihr Peer-Teaching zumindest teilweise selbstständig vorbereiten und für die Präsentation, Moderation und ggf. Reflexion eigen- bzw. mitverantwortlich sind, können sie ihre diesbezüglichen Kompetenzen (z.B. Medienkompetenzen) in besonderer Weise fördern (wodurch ein wichtiger Beitrag zur Stärkung ihrer Gesamtpersönlichkeit geleistet werden kann).

Dass kleine Matheasse einem Peer-Teaching sehr aufgeschlossen gegenüber stehen, die besonderen Lernpotenziale dieser Organisationsform selbst erkennen und deshalb mehrheitlich gerne dazu bereit sind, belegen folgende Statements von Viertklässlerinnen/-klässlern aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse“:

- „Ja! Ich finde es gut, wenn Kinder in der Schule zum Beispiel Vorträge halten, weil Kinder dann zeigen können, was sie können. … und die Lehrer können es dann mal sehen.“
- „Ja, sehr gut! Weil dann die Kinder noch mehr lernen können.“
- „Ja, weil ich gern etwas über andere Themen erfahren möchte … und man erfährt mehr über Kinder.“ „… weil es interessant ist, wenn andere Kinder ihr Wissen vortragen.“
- „Ja, weil Kinder anders erklären als die Lehrer.“
- „Ja, dann kann man mal selbst forschen und dann sein Wissen teilen.“
- „Ich finde es wichtig, Vorträge zu halten, weil wenn man groß ist, muss man vielleicht vor vielen und berühmten Leuten Vorträge halten.“
- „Ja, weil man dann seine eigene Meinung sagen kann.“
- „Ja, weil ich es cool finde, wenn sich das die Kinder zutrauen.“

In einzelnen Statements weisen die Kinder bereits auf wichtige Voraussetzungen für ein gelingendes Peer-Teaching hin, wie die prinzipielle Bereitschaft und grundsätzliche Eignung einer Schülerin/eines Schülers.
Dementsprechend sollte *eine Lehrkraft* Peer-Teaching, wie jede andere Fördermaßnahme, umsichtig planen und den Schülerinnen/Schülern, die die Lehrer/innenrolle einnehmen sollen, als Ratgeber/in, Motivator/in und Begleiter/in in allen Phasen zur Seite zu stehen. Dies schließt zunächst ein, das Peer-Teaching in die Gesamtgestaltung einer Unterrichtssequenz inhaltlich und didaktisch „einzupassen“. Zugleich sollte die Lehrkraft die jeweiligen fachlichen, metakognitiven, personellen und sozialen Kompetenzen einer Schülerin/eines Schülers, die/der in die Lehrerrolle schlüpft, gründlich analysie-

ren, um sie/ihn auf dieser Basis bei der Auswahl, der Planung und ggf. der Durchführung eines Peer-Teaching individuell beraten oder konkrete Hilfen geben zu können.

2. Empfehlenswerte Organisationsformen von Peer-Teaching im Mathematikunterricht zur Förderung mathematisch begabter Schüler/innen

Im Folgenden werden drei verschiedene Organisationsformen vorgestellt, die als Anregung für die Konzipierung von Peer-Teaching im Mathematikunterricht dienen können.

2.1 Leitung und Moderation von Gruppen- bzw. Projektarbeitsphasen

Im Idealfall sollten bei Gruppen- bzw. Projektarbeiten die teilnehmenden Schüler/innen die jeweiligen Aufgaben selbst bestimmen und dann unter sich verteilen. Wenn hierbei besondere Fachkompetenzen erforderlich oder die zu lösenden Aufgaben sehr komplex und anspruchsvoll sind, bietet es sich häufig an, dass diese Leistungen von einem kleinen Matheass erbracht werden. In Einzelfällen kann dies auch vorab mit der Lehrkraft abgesprochen werden.

Die zu leistenden Lerntätigkeiten für eine sehr leistungsstarke oder begabte Schülerin/einen sehr leistungsstarken oder begabten Schüler können sein:

- Spezielle mathematische Sachkenntnisse sichten, zusammentragen und für die Gruppen- oder Projektarbeit aufbereiten,
- den Mitschülerinnen/Mitschülern die Sachverhalte und -zusammenhänge erklären,
- Teilergebnisse von einzelnen Schülerinnen/Schülern gemeinsam mit Mitschülerinnen/Mitschülern systematisieren, sie prüfen und hiervon ausgehend eine Präsentation vorbereiten,
- die Moderation bzw. Präsentation der Gruppen- oder Projektergebnisse – je nach Gegebenheit – zum Teil, größtenteils oder vollständig übernehmen,
- die Moderation beim gemeinsamen Auswerten bzw. Reflektieren über die Gruppenarbeit übernehmen.

Ein Viertklässler moderiert die Präsentation eines Forscherergebnisses im Projekt „Mathe für kleine Asse“ an der Universität Münster

Konkrete Beispiele für diese Form von Peer-Teaching im Mathematikunterricht sind etwa:

- Lernkonferenzen zu einem neu einzuführenden Rechenverfahren, einem anspruchsvollen Konstruktionsproblem, einem den Schülerinnen/Schülern bisher unbekannten Zufallsexperiment, usw.,
- Projekte zu mathematikhaltigen Sachthemen, wie Erforschen von Biografien berühmter Mathematiker/innen, von statistischen Daten aus der Welt des Sports oder von Zusammenhängen zwischen Mathematik und Kunst.

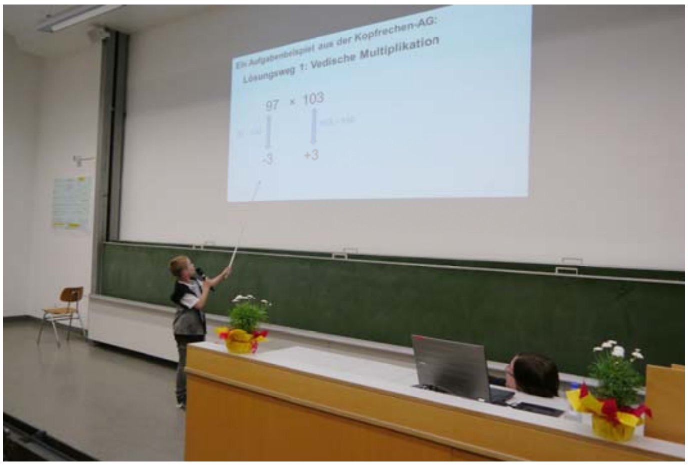
2.2 Referate zu speziellen mathematischen Themen

(Kurz-)Referate können nach unseren Erfahrungen bereits kleine Matheasse des dritten oder vierten Schuljahres halten. Hierfür bieten sich zum einen sehr anspruchsvolle Themen des regulären Curriculums und zum anderen besondere Themen, die den üblichen Schulstoff ergänzen oder bereichern, an (vgl. hierzu die nachfolgende Themenliste). Damit das Referat gelingt, sollte die Lehrkraft vorab mit den Schülerinnen/Schülern die inhaltliche Schwerpunktsetzung, die inhaltliche Struktur, Präsentationsformen, die Zeitdauer, die Einbeziehung von Medien u. Ä. m. gründlich besprechen. In Abhängigkeit von den jeweiligen Vorerfahrungen sowie den Sach-, Medien- und personalen Kompetenzen der Schülerin/des Schülers muss die Lehrkraft hierbei abwägen, inwiefern sie „Hilfe zur Selbsthilfe" gibt. Auf jeden Fall muss gesichert sein, dass eine Referentin/ein Referent einen bedeutenden Eigenanteil an der inhaltlichen und methodischen Gestaltung ihres/seines Vortrags leistet und sich somit auch mit dem Referat identifizieren kann.

Die konkreten Anregungen der Lehrkraft können sich auf Empfehlungen zum Titel, auf eine günstige inhaltliche Gliederung, auf die Einordnung des Vortragsthemas in die Struktur des Mathematikunterrichts, auf die Einbeziehung markanter Beispiele oder rhetorischer Effekte, ferner auf die Nutzung von Literatur- oder Internetquellen sowie auf wichtige Kriterien für die Bewertung der Schüler/innenleistungen beziehen. Zudem bietet sich ein Austausch über das eigene Vorwissen und über die Motivation der Referentin/des Referenten sowie auch über die zu erwartenden Vorkenntnisse, besondere Interessen oder Verständnisprobleme der Mitschülerinnen/Mitschüler an. Gegebenenfalls kann die Lehrkraft der Schülerin/dem Schüler auch die Möglichkeit für einen Probevortrag einräumen. Nach unseren Erfahrungen ist es speziell für jüngere bzw. noch relativ unerfahrene Referentinnen/Referenten sehr hilfreich zu wissen, dass die Lehrkraft je nach Bedarf die Nutzung von Medien bereitstellt oder unterstützt oder im Falle eines unerwarteten Problems während der Vortragspräsentation helfend „eingreift".

Die Lehrkraft sollte in der Phase der Vortragspräsentation die Lerntätigkeit der (zuhörenden) Mitschülerinnen/ Mitschüler organisieren. Diese könnte z.B. im Mitnotieren wichtiger Begriffe oder Sachzusammenhänge, im Finden passender Beispiele oder im Sammeln von Verständnisfragen bestehen.

Schließlich sollte die Lehrkraft nach dem Referat mit der Schülerin/dem Schüler eine individuelle kompetenzorientierte Auswertung anhand der vorgegebenen Kriterien vornehmen und Schüler/innen dadurch zu weiteren Vorträgen o.Ä. ermutigen.



Vortrag eines Fünftklässlers auf einer Lehrerfortbildungsveranstaltung in Münster (2015)

Dass kleine Matheasse sogar vor mehr als 100 Lehrkräften beeindruckende Vorträge halten können, bewies z.B. der elfjährige Domenic, der auf der Tagung „Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion" an der Universität Münster mit raffinierten Kopfrechentricks die Zuhörer/innen in seinen Bann zog (Benölken & Käpnick 2016).

Beispiele für Vortragsthemen im Mathematikunterricht des dritten bis sechsten Schuljahres, die den üblichen Unterrichtsstoff ergänzen und bereichern können[1]:

a) Zahlen und Operationen

- Alternative Rechenmethoden
- Dualzahlen, römische Zahlen

[1] Viele konkrete Ausarbeitungen zu verschiedenen Vortragsthemen findet man in den Fördermaterialien, die im Literaturverzeichnis angegeben sind.

- Zahlphänomene: Bedeutung der Zahl 0, Was bedeutet „unendlich“? Woher kommen die Zahlwörter?
- Zahlenmystik, Zahlen in Märchen, Zahlen im Alltag

b) Raum und Form
- Parkettmuster im Alltag oder in der Kunst
- Formen und Muster an Gebäuden (Kirchen), an Brücken, usw.
- Platonische Körper
- Optische Täuschungen

c) Größen und Messen
- Alte Maßeinheiten
- Größenangaben von Gebäuden, Brücken, usw. im Vergleich
- Größenangaben zu Tieren, Pflanzen, zu Flüssen, Bergen, Wolken usw. im Vergleich
- Statistiken aus den Bereichen Sport, Musik, Kultur, usw.
- Geschichte der Kalenderrechnung

d) Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten
- Zufallsprozesse in der Natur
- Statistische Auswertungen und Wahrscheinlichkeiten im Sport
- Zufallsexperimente am Computer

2.3 Lernpatenschaften[2]

Die Grundintention dieser Organisationsform besteht bekanntlich darin, dass eine leistungsstarke bzw. begabte Schülerin/ein leistungsstarker bzw. begabter Schüler für eine bestimmte Zeitspanne die „feste“ Patenschaft für eine Schülerin/einen Schüler mit Leistungsproblemen übernimmt. Im Hinblick auf eine ganzheitliche Persönlichkeitsentwicklung lässt sich herausstellen, dass sich solche Lernpatenschaften nicht nur sehr positiv auf die Verbesserung von Fachkompetenzen, sondern mindestens ebenso auf das psychische Wohlbefinden der Schüler/innen in der Schule auswirken. Durch die Patenschaften entwickeln sich beispielweise häufig feste und vertrauensvolle Bindungen, oft sogar enge Freundschaften zwischen den Patenschülerinnen/Patenschülern. Demgemäß können Patinnen/Paten für andere Schüler/innen neben den Lehrkräften äußerst wichtige Bezugspersonen darstellen, die ihnen in der Schule Sicherheit und Halt geben. Vor allem in schwierigen Konfliktsituationen erfahren Schüler/innen solche Patenschaften meist als wertvolle und unersetzliche Hilfen. Diese Effekte gelten zwar vor allem für Schüler/innen mit besonderen Förderbedarfen. Aber in der Regel profitieren aus den Lernpatenschaften auch leistungsstarke bzw. begabte Schüler/innen. Wenn sie ihrer Patin/ihrem Paten fachliche Zusammenhänge erklären oder an Beispielen mathematische Algorithmen verdeutlichen, vertiefen sie auch ihr eigenes Verständnis, entwickeln Kompetenzen im Darstellen, im Argumentieren und sie sammeln wertvolle soziale und personale Kompetenzen. Demgemäß bestätigen Praxiserfahrungen immer wieder, dass leistungsstarke Schüler/innen im Allgemeinen gern bereit und sehr motiviert sind, in der Schule Verantwortung für andere zu übernehmen.

Solche Patenschaften im Mathematikunterricht können je nach Bedarf für den Zeitraum einiger Wochen oder Monate geschlossen werden. Sie können ebenso bei nachweisbaren Erfolgen über einen längeren Zeitraum, z.B. für ein Schuljahr oder sogar mehrere Schuljahre fortbestehen. Die angesprochenen positiven Effekte stellen sich insbesondere bei festen und längerfristigen Lernpatenschaften ein.

[2] Die Inhalte dieses Abschnitts entstammen größtenteils dem Kapitel 6.8 des Buches „Verschieden verschiedene Kinder“ (s. Literaturverzeichnis).

Im Allgemeinen bietet es sich an, die Patenteams am Anfang eines Schuljahres festzulegen. Hierbei können die Lehrkräfte die einzelnen Teams festlegen oder die Schüler/innen wählen ihre Patinnen/Paten selbst, wobei es zu beachten gilt:

- Wählen Lehrpersonen die Patenteams aus, können sie aus pädagogischer Sicht sinnvolle Gruppierungen bilden und damit dem Risiko von einander behindernden Teamkonstellationen entgegenwirken.
- Für das Bestimmen der Patenschaften durch die Schüler/innen selbst spricht, dass diese dadurch schneller (Eigen-)Verantwortung für ihr Patenteam übernehmen. Unseren Erfahrungen zufolge identifizieren sich die Schüler/innen in der Regel dann auch weitaus stärker mit der Patin/dem Paten und der verantwortungsvollen Aufgabe der Patenarbeit.
  Außerdem ist zu berücksichtigen, dass die Patenteams während der Schulzeit sehr viel Zeit miteinander verbringen und es daher sinnvoll erscheint, Schüler/innen mit einer Partnerin/einem Partner zusammenarbeiten zu lassen, die/den sie akzeptieren bzw. sogar mögen.

Aber unabhängig davon, wie ein Patenteam gebildet wird, kann die Gefahr später entstehender Konflikte, die das Lernen eher behindern als fördern, nicht vollständig ausgeschlossen werden. In einem solchen – erfahrungsgemäß selten eintretenden – Fall sollte die Lehrkraft im Nachhinein „regulierend“ eingreifen.

Damit sich eine Lernpatenschaft erfolgreich entwickelt, sollten folgende personelle, inhaltliche und organisatorische Aspekte beachtet werden:

- Die Hauptverantwortung für die fachliche Förderung einer Schülerin/eines Schülers tragen auch in Patenschaften stets die Lehrkräfte mit ihren professionellen fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Kompetenzen. Ein kleines Matheass kann leistungsschwächere Schüler/innen dennoch fachlich sehr wirksam unterstützen. Fachliche Unterstützung sollte allerdings nicht (professionelle) fachliche und individuelle Förderung bedeuten, sondern sich vor allem auf Hilfen beim Verstehen mathematischer Sachverhalte und beim Bearbeiten von Übungs- und Anwendungsaufgaben beziehen.
- Eine fachliche Unterstützung von differenziert unterrichteten Schülerinnen/Schülern in einem inklusiven Mathematikunterricht kann beispielsweise darin bestehen, dass ein Matheass seiner Patin/seinem Paten eine Aufgabenstellung erläutert, mit ihm gemeinsam eine Aufgabe löst oder bei Fehlern Korrekturhilfen gibt. Solche Hilfen haben sich erfahrungsgemäß sehr bewährt, weil sich die Schüler/innen ohnehin untereinander sehr gut verstehen und sich demgemäß meist auch leicht Verständnisbrücken für mathematische Zusammenhänge bauen. Dennoch sollten sich diese Hilfen auf kurze Hinweise und Zeiträume beschränken, da die Patenschülerin/der Patenschüler vorrangig seine eigenen Aufgaben bearbeiten soll. Bei notwendiger intensiverer Unterstützung sollten die Lehrkräfte als Ansprechpartner wirken. Dies gilt insbesondere dann, wenn eine Patin/ein Pate beim Erklären eines Fachbegriffes, eines Lösungsweges oder eines Rechenfehlers überfordert ist.
- Die beiden Lernpartner/innen sollten im Unterricht nebeneinander sitzen, damit sie intensiv zusammenarbeiten und sich gegenseitig unterstützen können. Dies muss die Lehrkraft von Anfang an bei der Organisation der Sitzordnung berücksichtigen.
- Vor allem am Schulanfang können leistungsstarke bzw. begabte Schüler/innen als Lernpatinnen/Lernpaten eine große Erleichterung für Schulkinder mit besonderen Förderbedarfen sein. Sie können ihren Patenschülerinnen/Patenschülern beim Meistern vielfältiger Anforderungen des Unterrichtsalltags helfen, wie z.B. beim Gebrauch von Zeichengeräten, des Taschenrechners oder des Computers. Darüber hinaus könnten sie ihren Patinnen/Paten auch in den Pausen der Eingewöhnungszeit hilfreich zur Seite stehen, ihnen Sicherheit bieten und Vertrautheit ermögli-

chen. Dies schließt ein, sich als verlässliche Ansprechpartner/innen anzubieten oder gegebenenfalls die Patin/den Paten beim Zurechtfinden im Schulgebäude zu unterstützen.

- In regelmäßigen Abständen sollten Lehrkräfte mit den Schülerinnen/Schülern Gespräche über die Entwicklung einer Lernpatenschaft führen, die zum einen gemeinsame Auswertungen der fachlichen und sozialen Kooperation beinhalten, aber zugleich auch Anregungen für zukünftige Ziele umfassen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die beschriebenen Lernpatenschaften nicht in allen Lerngruppen organisatorisch umsetzbar sind bzw. dass nicht immer ein derartig komplexer, den gesamten Schulalltag umfassender Unterstützungsbedarf zwischen Schülerinnen/Schülern organisiert werden muss. Dies fundiert einzuschätzen, bleibt jeweils in der Obhut der Lehrkräfte „vor Ort“.

Literatur

Benölken, R. & Käpnick, F. (Hrsg.) (2016). Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion. Tagungsband aus Anlass des zehnjährigen Bestehens des Projekts „Mathe für kleine Asse“ und des einjährigen Jubiläums des Projekts „MaKosi“. Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2010). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern. Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2016). Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht. Seelze: Friedrich Verlag.

Rodeck, K. (2006). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler). Berlin: Cornelsen.

Lerninseln im Mathematikunterricht

Ein Blick in viele Klassenzimmer verrät, dass häufig zwar verschiedene mathematische Anschauungsmaterialien, wie z.B. Plättchen, Spielgeld oder Steckwürfel vorhanden sind, jedoch diese im alltäglichen Mathematikunterricht leider nur selten eingebunden werden. Integriert in sogenannte mathematische Lerninseln bietet dieses Material ein hohes Potenzial, selbstgesteuertes Lernen in individuellen Lernphasen zu ermöglichen. Neben diesen Anschauungsmaterialien und entsprechenden Arbeitsaufträgen finden hier auch Spiele mit mathematischem Bezug, wie z.B. Ubongo oder Potz Klotz, Messgeräte oder kleine mathematische Nachschlagewerke (vgl. z.B. Fuchs & Käpnick, 2009) ihren Platz.

Bei der Gestaltung einer Lerninsel sollte zunächst beachtet werden, ob diese nur für eine bestimmte Klassenstufe oder Einheit konzipiert wird oder langfristig – ggfs. durch ständige Überarbeitungen – jahrgangs- oder lehrplanübergreifend eingesetzt werden soll. Lerninseln können hierbei z.B. nach spezifischen mathematischen Inhaltsbereichen räumlich strukturiert werden. Bei der Auswahl passender Inhalte für alle Schüler/innen einer Lerngruppe eignen sich vor allem Arbeitsaufträge und Materialangebote, die den Anforderungen einer natürlichen Differenzierung entsprechen. Mit diesem Anspruch öffnen sich Lerninseln allen Kindern bzw. Jugendlichen einer Lerngruppe unabhängig von ihrem individuellen Lernstand und ihren Kompetenzen und bieten so eine Möglichkeit, auch inklusiven Mathematikunterricht durchzuführen. Bieten die Lerninseln zudem Selbstkontrollmöglichkeiten, z.B. in Form einer Lösungskartei, kann zudem die Autonomie der Kinder bzw. Jugendlichen gefördert werden. In Bezug auf die Begabungsförderung haben Lerninseln deshalb ein hohes Potenzial, weil Schüler/innen sich über den behandelten Lernstoff hinaus (selbstständig) mit weiterführenden Fragestellungen oder mit alternativen mathematischen Themenfeldern beschäftigen können – jeweils ihren individuellen Lernpotenzialen und Interessen entsprechend. Demgemäß gestaltete Lerninseln unterstützen folglich sowohl ein lernzieldifferentes als auch ein forschendes Lernen.

Hinsichtlich der Organisation einer Lerninsel muss ferner festgelegt werden, ob diese jederzeit oder nur in begrenzten Phasen bzw. Stunden des Mathematikunterrichts geöffnet ist und ob diese für alle Kinder oder nur für eine Gruppe ausgewählter Kinder zugänglich sein soll. Zudem sollte die pädagogische Fachkraft anfangs alle Schüler/innen in die Arbeit mit der Lerninsel einführen und sie zum selbstständigen Nutzen der Materialien aus der Lerninsel befähigen. Ob spezielle Aufgaben oder Arbeitsaufträge an die Schüler/innen verteilt oder diese selbst gewählt werden, hängt von der jeweiligen Funktion der Lerninselarbeit ab. Es besteht außerdem die Möglichkeit, dass Schüler/innen Arbeitsaufträge alleine oder kooperativ bewältigen. In Phasen der „Lerninselarbeit“ sollte die Lehrkraft eine eher passive bzw. beobachtende Rolle einnehmen und für Hilfestellungen und Nachfragen zur Verfügung stehen.

Hinsichtlich der unterschiedlichen Funktionen und Ziele einer mathematischen Lerninsel lassen sich folgende Gestaltungs- und Organisationsmöglichkeiten ableiten:

- Die Lerninsel sollte allen Schülerinnen/Schülern zugänglich sein.
- Sie sollte gemäß den kindlichen Voraussetzungen gestaltet werden (Erreichbarkeit, Handhabbarkeit der Materialien).
- Sie sollte ansprechendes, anregendes, vielfältig und sinnvoll einsetzbares Material zur Unterstützung für die Arbeit auf allen Repräsentationsebenen bereitstellen.
- Sie sollte die Möglichkeit zur direkten autonomen Selbstkontrolle bieten.
- Sie sollte Arbeitsaufträge und Materialien bereitstellen, die der natürlichen Differenzierung genügen und somit von Kindern mit sehr unterschiedlichen Leistungspotenzialen und -

bedürfnissen erfolgreich bearbeitet werden können. Anforderungen für solche Aufgaben können z.B. bei Käpnick (2006) nachgelesen werden.

Ein Beispiel für eine Lerninsel im Mathematikunterricht der ersten Schuljahre

Als Umsetzungsbeispiel einer Lerninsel im Rahmen des Mathematikunterrichts wird im Folgenden die mathematische Lerninsel der **Koala-Klasse der Wartburg-Grundschule in Münster** vorgestellt. Alle Angaben zur mathematischen Lerninsel beziehen sich auf ein Interview mit **Marion Weist-Konen**, einer Lehrerin des aus drei pädagogischen Fachkräften bestehenden Klassenleitungsteams der Koala-Klasse. Die Klasse verfügt (zusätzlich) auch über eine Lerninsel für den Bereich Lesen und Schreiben. Gemäß dem Konzept der Grundschule werden die Kinder hier in jahrgangsübergreifenden Klassen unterrichtet. Es gibt keine vorgegebenen Fachstunden, sondern die Kinder arbeiten selbstbestimmt in individuellen Lernzeiten an eigenen Lernzielen, begleitet durch einen Wochenarbeitsplan (WAP). Die Lernziele und ihre Bearbeitungszeitpunkte bzw. -zeiträume werden von den Kindern selbst bestimmt und wurden in der Schuleingangsphase in Form von individuell gestalteten Lernlandkarten festgehalten. Die für die Schüler/innen einer ersten und zweiten Klasse eingerichtete Lerninsel dient sowohl der Diagnose des Lernstandes als auch dem Üben zum Erreichen bestimmter Lernziele sowie damit verbunden auch der Kontrolle über das Erreichen dieser Lernziele.

Die mathematische Lerninsel der Koala-Klasse an der Wartburg-Grundschule in Münster (Foto: Bugzel)

Zur Struktur der Lerninsel

Die Lerninsel enthält Aufgabenblätter, Rechenkarteien, Anschauungsmaterialien und Spiele, die bestimmten Lernzielen zugeordnet werden und die orientiert nach der inhaltlichen Einteilung des Zahlenbuches und nach den Phasen der individuellen Lernpläne der Schüler/innen sortiert sind. Auf der linken Seite des Regals befinden sich Anschauungsmaterialien zum Zahlenraum bis 20, in der Mitte zum Zahlenraum bis 100 und auf der rechten Seite des Regals übergreifende Materialien beispielsweise zu den Themengebieten Geometrie, Größenbereiche oder mathematische Spiele. Die einzelnen Bereiche werden wiederum an den Regalbrettern benannt, sodass das Material nach der Nutzung wieder richtig eingeordnet werden kann. Ein weiterer fester Bestandteil der anregenden Lernumgebung ist ein frei nutzbarer Computer. Hier können die Schüler/innen verschiedene mathema-

ANN-KATRIN BRÜNING & JANA BUGZEL
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

tische Lernprogramme wie z.B. Puschi oder Blitzrechnen für ein selbstbestimmten Üben auswählen oder Internetrecherchen zu Forscheraufträgen vornehmen.

Zur Organisation der Lerninsel

Die Lerninsel, die sich in einem an den Klassenraum angliederten Nebenraum befindet, steht den Schülerinnen /Schülern im Rahmen der Lernzeit jederzeit zur Verfügung. Neben den angebotenen Materialien bietet sie auch die direkte Möglichkeit zur Selbstkontrolle in Form von Lösungskarteien. Der Umgang mit den Materialien zu spezifischen Themenfeldern sowie auch allgemein mit der Lerninsel wird in Kleingruppen, die an dem gleichen Lernziel arbeiten, durch die Lehrkraft eingeführt. Durch das Lernpatensystem der jahrgangsübergreifenden Klasse können zudem die jüngeren Schüler/innen von den älteren lernen.
Die Lerninsel stellt in der Koala-Klasse einen unverzichtbaren „Baustein" des Konzepts der individuellen Förderung der Schüler/innen dar. Im jahrgangsübergreifenden Unterricht hat sich insbesondere die langfristige Verfügbarkeit des Materials für verschiedene mathematische Themenfelder im Rahmen der Lerninsel bewährt. Gemäß dem Konzept der individuellen Förderung in einer jahrgangsgemischten Klasse findet so jedes Kind entsprechend seinen individuellen Zielen und persönlichen Vorlieben die passenden Materialien und kann auf diese Weise seine jeweiligen Potenziale entfalten. Anzumerken ist, dass die Nutzeffekte der Materialien auch stetig geprüft werden. Auf diese Weise soll gesichert werden, dass in der Lerninsel nur Materialien angeboten werden, deren Umsetzung sich bewährt hat. Außerdem beinhaltet die Lerninsel Angebote, die über die curricularen Bestimmungen für Kinder des ersten und zweiten Schuljahres hinausgehen und die sich somit auch für die Förderung mathematisch begabter Kinder eignen, wie beispielsweise Blitzrechenkarteien bis 1 .000 oder bis 1 000 000. Entsprechend dem Ansatz der Akzeleration können auf diese Weise mithilfe der Lerninselnutzung Fachinhalte aus dem dritten und vierten Schuljahr vorgezogen werden, sobald die Kinder die Lernziele der Schuleingangsphase erreicht haben.
Damit alle Kinder sich schnell mit den vielen verschiedenen Materialien einer Lerninsel zurechtfinden, empfiehlt Marion Weist-Konen eine Strukturierung in Anlehnung an das jeweils im Unterricht verwendete Schulbuch (hier z.B. „Mathe 2 000"). Eine andere Möglichkeit zum Aufbau der Lerninsel sieht sie in der Orientierung an den verschiedenen Lernzielen der Kinder. Dies wird vor allem in den Jahrgangsstufen 3 und 4 der Wartburgschule umgesetzt. In jüngeren Jahrgangsstufen kann diese Struktur für einige Kinder noch zu Verwirrungen führen, wenn z.B. mit einem einzelnen Anschauungsmaterial verschiedene Lernziele erreicht werden können, die ja wiederum alle genannt bzw. visualisiert werden müssten. Beim Aufbau der Lerninsel rät sie außerdem zur achtsamen Materialauswahl, sodass die Schüler/innen erstens nicht durch ein Überangebot an Materialien überfordert werden und die Lerninsel zweitens lediglich solches Material enthält, von dem die Lehrkraft überzeugt ist, dass es zum Erreichen des jeweiligen Lernziels geeignet ist. Das „Abstimmen" der verschiedenen Anschauungsmaterialien aufeinander hebt Frau Weist-Konen dementsprechend als eine wichtige Voraussetzung für eine erfolgreiche Nutzung von Lerninseln hervor.

Materialempfehlungen für die Lerninsel zur Förderung kleiner Matheasse

In Abhängigkeit von den Lernpotenzialen und -interessen mathematisch begabter Schüler/innen bieten sich nachfolgende Materialien für eine Lerninsel an:

Ausgewählte deutschsprachige Bücher mit vielen Knobelaufgaben, Spielen oder lustigen Geschichten aus der Welt der Mathematik

a) Schwerpunkt: Klassenstufen 1 bis 4

Blay, E. (1989). Kleine Denkspielereien für helle Köpfe (4. Aufl.). München: Heyne.
Brey, L. (1989). Denksportaufgaben. Regensburg: Wolf Verlag.
Dahl, K. & Nordqvist, S. (2000). Zahlen, Spiralen und magische Quadrate (Mathe für jeden). Hamburg: Oetinger.
Dahl, K. & Lepp, M. (2000). Wollen wir Mathe spielen? Witzige Spiele und knifflige Rätsel. Hamburg: Oetinger.
Enzensberger, H. M. (1997). Der Zahlenteufel. München: Hanser.
Fuchs, M. (2004). Mathe für kleine Asse Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.
Fuchs, M. (2009). Mathe für kleine Asse (Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). Berlin: Cornelsen.
Fuchs, M. & Käpnick, F. (2007). Knobelkalender – Mathe für kleine Asse. Berlin: Cornelsen.
Fulton, J. & Bremner, J. (1998). Denksport – Aufgaben für kluge Köpfe (Zahlen-, Bilder- und Wörterrätsel). Wien: Tosa Verlag.
Gnirk, H., Homann, G. & Lubeseder, M. (1970). Strategiespiele für die Grundschule. Hannover: Schroedel.
Haubold, H. (1995). Rechnen, Knobeln, Kombinieren. Berlin: Volk und Wissen.
Hemme, H. & Schwoerer, M. (1998). Mathematischer Denkspaß. Augsburg: Weltbild Verlag.
Hund, W. (1999). Zauberhafte Mathematik. Berlin: Cornelsen.
Käpnick, F. (2001, 2008). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler; Bd. 1 u. 2). Berlin: Cornelsen.
Küstenmacher, M. & Küstenmacher, W. (2000). Neue Wege finden: Labyrinthe. München: Ludwig Verlag.
Lehmann, J. (1993). 2 mal 3 plus Spaß dabei. Berlin: Aulis.
Lietzmann, W. (1982). Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formeln. Göttingen: Vandenbborck u. Ruprecht.
Müller-Fonfara, R. (1993). Mathematische Denkspiele. Düsseldorf: ECON.
Picon, D. (2005). Optische Täuschungen. Köln: Fleurus Verlag.
Rechberger, K. (1991). Vergnügliche Denk- und Knobelspiele. Niedernhausen: Goldmann.
Senftleben, H.-G. (1999). Unterhaltsame Knobeleien. Niederhausen: Falken-Verlag.
Stiefenhofer, M. (1999). Knobelkiste. 400 harte Nüsse für schlaue Köpfe. Augsburg: Weltbild Verlag.

b) Schwerpunkt: Klassenstufen 5 bis 10

Adam, B. (1998). 350 harte Nüsse für schlaue Köpfe. Augsburg: Weltbild Verlag.
Aman, F. (1991). 111 Aufgaben zur Begabtenförderung (Bd. I). Stuttgart: Klett.
Beutelspacher, A. (2005). Christian und die Zahlenkünstler. Eine Reise in die wundersame Welt der Mathematik. München: Beck Verlag.
Beutelspacher, A. (2010). Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik. München: Beck Verlag.
Dambeck, H. (2012). Je mehr Löcher, desto weniger Käse. Mathematik verblüffend einfach. Köln: Verlag Kiepenheuer & Witsch.
Fritzlar, T. & Rodeck, K. (2006). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler). Berlin: Cornelsen.
Lietzmann, W. (1982). Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formeln. Göttingen: Vandenbborck u. Ruprecht.
Loyd, S. (2005). Mathematische Rätsel und Spiele. Denksportaufgaben für kluge Köpfe. Köln: DuMont Verlag.
Moscovisch, I. (2005). Kopfnüsse. Köln: Fleurus Verlag.

Parker, M. (2015). Auch Zahlen haben Gefühle. Reinbek: Rowohlt.

Schonard, A. & Kokot, C. (2011). Der Matheknüller. Schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt. Göppingen: Schonard.

Stewart, I. (1996). Das Versteck der Andromeda. 17 mathematische Kurzgeschichten aus Spektrum der Wissenschaft. Heidelberg: Spektrum Akadem. Verlag.

Stewart, I. (1998). Die Zahlen der Natur. Mathematik als Fenster zur Welt. Heidelberg: Spektrum Akadem. Verlag.

Stewart, I. (2011). Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium. Reinbek: Rowohlt.

Vohland, U. (2001). Denkspaß Zahlenspiele für 10-16 Jährige. Mainz: Mathias-Grünewald-Verlag.

Vordermann, C. (2000). Spannendes aus der Welt der Mathematik. Experimentieren und Kapieren. München: Christian Verlag.

Zehl, R. (1984). Denken mit Spaß (Über 200 Kopfnüsse für intelligente Tüftler). Wien: ORAC Verlag.

Spiele zur Förderung von Kreativität und speziellen mathematischen Kompetenzen

Can`t Stop! (Sackson, S.). Ravensburg: Ravensburger Spieleverlag.

Just 4Fun (Grunau, J.). Stuttgart: Kosmos Verlag.

Mastermind. Dietzenbach: Parker.

PlotzKlotz (Spiegel, H. & Spiegel, J.). Seelze: Friedrich Verlag.

Take it eaysy! (Burley, P.). Ravensburg: Ravensburger Spieleverlag.

Ubongo (Rejchtman, G.). Stuttgart: Kosmos Verlag.

Weiterführende Literatur

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). Grundwissen Mathematik. 1.-4. Schuljahr. Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. (2001, 2008). Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Band 1. Berlin: Cornelsen.

Lucian-Reich-Schule Hüfingen: Lernen in der Grundschule. Abgerufen von http://www.lucian-reich-schule.de/index.php?page=795165484&f=1&i=1137634774 [13.03.2018]

Materialien Wartburggrundschule Münster. Abgerufen von http://www.wartburg-grundschule.de [28.07.2016]

Städtische Gemeinschaftsgrundschule Engelbertstraße: Inklusion/Gemeinsamer Unterricht. Von der Integration zur Inklusion - gemeinsam auf dem Weg - sonderpädagogische Förderung an der Grundschule Engelbertstraße. Abgerufen von http://www.grundschule-engelbertstrasse.de/unterricht/inklusion-gemeinsamer-unterricht [19.07.2016]

Flexible Gruppierungen im Mathematikunterricht

1. Ein authentisches Unterrichtsbeispiel

In einer „Mathestunde“ einer sechsten Jahrgangsgruppe plante Frau Baum, die Fachlehrerin, den Einsatz einer offenen Problemaufgabe: das Erkunden von Teilbarkeitsregeln (vgl. nebenstehende Abbildung). Hierfür stellte sie Kleingruppen zusammen, bestehend aus jeweils ein oder zwei sehr leistungsstarken, zwei durchschnittlich starken und zwei leistungsschwachen Kindern. Frau Baum verband dies mit der Erwartung, dass sich die Kinder in den leistungsheterogenen Gruppen gegenseitig helfen würden. In der Umsetzung zeigte sich dann aber, dass die von der Lehrerin erhofften Effekte nur zum Teil eintrafen. So bemühte sich Luca, ein mathematisch sehr begabter Junge, zunächst zwar hochmotiviert, den anderen Kindern seiner Gruppe eine von ihm entdeckte Regel für die Teilbarkeit großer Zahlen durch 11 zu erläutern. Er gab dies jedoch recht schnell wieder auf – zum einen, weil die Mitschüler/innen Lukas‘ Erklärungen nicht verstanden und zum anderen, weil es Luka selbst vielmehr reizte, auch noch Regeln für das Teilen durch 7 und 13 zu erkunden. Die anderen Gruppenmitglieder wollten sich dagegen stärker dem vertiefenden Verstehen von Regeln für das Teilen durch 3, 6 und 9 zuwenden. In einer anderen Gruppe kam eine Zusammenarbeit nicht zustande, weil Finn entsprechend seinem bevorzugten intuitiv-kreativen Problemlösestil spontan und sprunghaft immer wieder neue Ideen „in die Runde warf“, diese aber ebenso schnell wieder fallen ließ. Marie, ein anderes kleines Matheass mit systematisch geprägter Arbeitsweise wurde davon irritiert. Das Mädchen versuchte dann alternativ Schritt für Schritt Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 6, … zusammenzustellen, diese an Beispielaufgaben mit den anderen Gruppenmitgliedern zu prüfen und dabei auch Querbezüge zwischen den Regeln zu erkennen.

> **Forscherauftrag:**
> Erkundet Regeln für das Teilen durch 2, 3, 4, … oder 12.
> Versucht dabei Zahlbeziehungen und Gemeinsamkeiten von Regeln zu entdecken und sie zu begründen.

Abb. 1: Forscherauftrag zum Erkunden von Teilbarkeitsregeln

Die angesprochenen Schwierigkeiten decken sich mit unseren langjährigen Erfahrungen in der Förderung mathematisch begabter Kinder und lassen sich wie folgt verallgemeinern:

> Die nur scheinbar homogene Gruppe der kleinen Matheasse hat größtenteils sehr unterschiedlich ausgeprägte individuelle (kognitive) Interessen, Kompetenzen, Denk- und Lernstile. Dadurch wird ein wechselseitig bereicherndes gemeinsames Problemlösen in der unmittelbaren Phase des Bearbeitens und Findens von Lösungen eher behindert als gefördert. Demgemäß knobeln kleine Matheasse beim Suchen nach Problemlösungen bevorzugt allein (vgl. Fuchs, 2006, Käpnick, 2013, 2014). Sie streben es meist auch bewusst an, weil sie den Anspruch haben, die Aufgaben selbst zu lösen, und das Glücksgefühl („Flow-Effekt“) im Moment des Findens einer Lösung genießen möchten.

2. Voraussetzungen und Chancen für flexible Gruppierungen

Ungeachtet der einleitend geschilderten Probleme kann eine Partner- oder Kleingruppenarbeit mit kleinen Matheassen im regulären Mathematikunterricht natürlich/dennoch sehr wohl auch Gewinn bringend sein. Dies gilt insbesondere für Lernphasen, in denen

- sich die Kinder (nach einer Forscherphase) im Rahmen einer Mathekonferenz über entdeckte Lösungswege, verschiedene Lösungsdarstellungen u.a.m. austauschen,
- kleine Matheasse ihre speziellen Kenntnisse oder Fähigkeiten beim Bearbeiten einer komplexen Aufgabe im Rahmen einer Forscher- oder Projektarbeit untereinander effektiv ergänzen können,
- ein mathematisch begabtes Kind eine „Lernblockade“ hat, die durch einen Impuls von anderen im Sinne eines Motivations- oder Denkanstoßes beseitigt werden kann.

Außerdem gibt es unseren Erfahrungen zufolge auch einige kleine Matheasse, die prinzipiell gern und erfolgreich zu zweit oder zu dritt anspruchsvolle Aufgaben bearbeiten (was vor allem auf Mädchen zutrifft; vgl. Benölken, 2011).

Diese Aspekte beachtend, ist es für eine gelingende Partner- oder Gruppenarbeit wichtig, neben der inhaltlichen und der didaktisch-methodischen Gestaltung einer Lerneinheit auch stets die Zusammensetzung der Schüler/innengruppe gründlich zu durchdenken:

- So sollte eine Lehrkraft die jeweiligen Interessen, die kognitiven und mathematischen Kompetenzniveaus, die individuell bevorzugten Denk- und Lernstile sowie die sozialen Kompetenzen der Kinder berücksichtigen.
- Zudem sollte den Kindern beim Zusammenstellen der Lerngruppen prinzipiell ein Mitspracherecht eingeräumt werden. Je nach (frei wählbarem) Projektthema (z.B. Zahlen und Größen in der Pflanzen- und Tierwelt, in der Architektur oder im Verkehr; Geheimcodes; Querverbindungen zw. Mathematik und Kunst/Musik) werden sich zwischen unterschiedlichen kleinen Matheassen (sowie anderen Kindern) günstige Gruppenzusammenstellungen ergeben.
- Für das (moderierende) Leiten einer leistungsheterogenen Lerngruppe beim Üben im Bruchrechnen, im Lösen von Gleichungen oder beim Durchführen und Analysieren von Zufallsexperimenten bieten sich vor allem kleine Matheasse mit guten Sozialkompetenzen an.

Chancen (bzw. Vorzüge) solch flexibler Gruppierungen sind:

- In Bezug auf die Förderung mathematisch sehr leistungsstarker bzw. begabter Kinder kann ein wertvoller Beitrag zur Stärkung ihrer Persönlichkeitsentwicklung geleistet werden. Ihr Selbstwertgefühl, ihre sozialen und kommunikativen Kompetenzen können bei gelingender Gruppenarbeit verbessert werden. Außerdem führt das Erklären von Rechenalgorithmen u. Ä. m. für leistungsschwächere Mitschüler/innen oft dazu, dass begabte Kinder gedanklich noch tiefer in mathematische Zusammenhänge eindringen.
- Die Mitschüler/innen profitieren dadurch, dass sie Erklärungen von gleichaltrigen Kindern gegenüber denen einer Lehrkraft häufig besser (bzw. anders) verstehen, dass sie Gleichaltrigen ihre Verständigungsprobleme meist offener anvertrauen oder sich vergleichsweise motivierter mit den jeweiligen mathematischen Lernthemen auseinandersetzen.
- Mit der Umsetzung flexibler Gruppierungen können beim gemeinsamen Lernen unterschiedliche Potenziale von Schülern/innen effektiv genutzt und zugleich gestärkt werden, zudem werden einseitige Rollenstigmatisierungen vermieden.
- Flexible Gruppierungen ermöglichen verschiedenartige soziale Konstellationen und unterschiedliche Lernorganisationsformen, sodass der gesamte Unterricht von den Kindern als „lebendig“ und vielseitig gestaltet erlebt werden kann.

3. Beispiele für gelingende flexible Gruppierungen im Mathematikunterricht

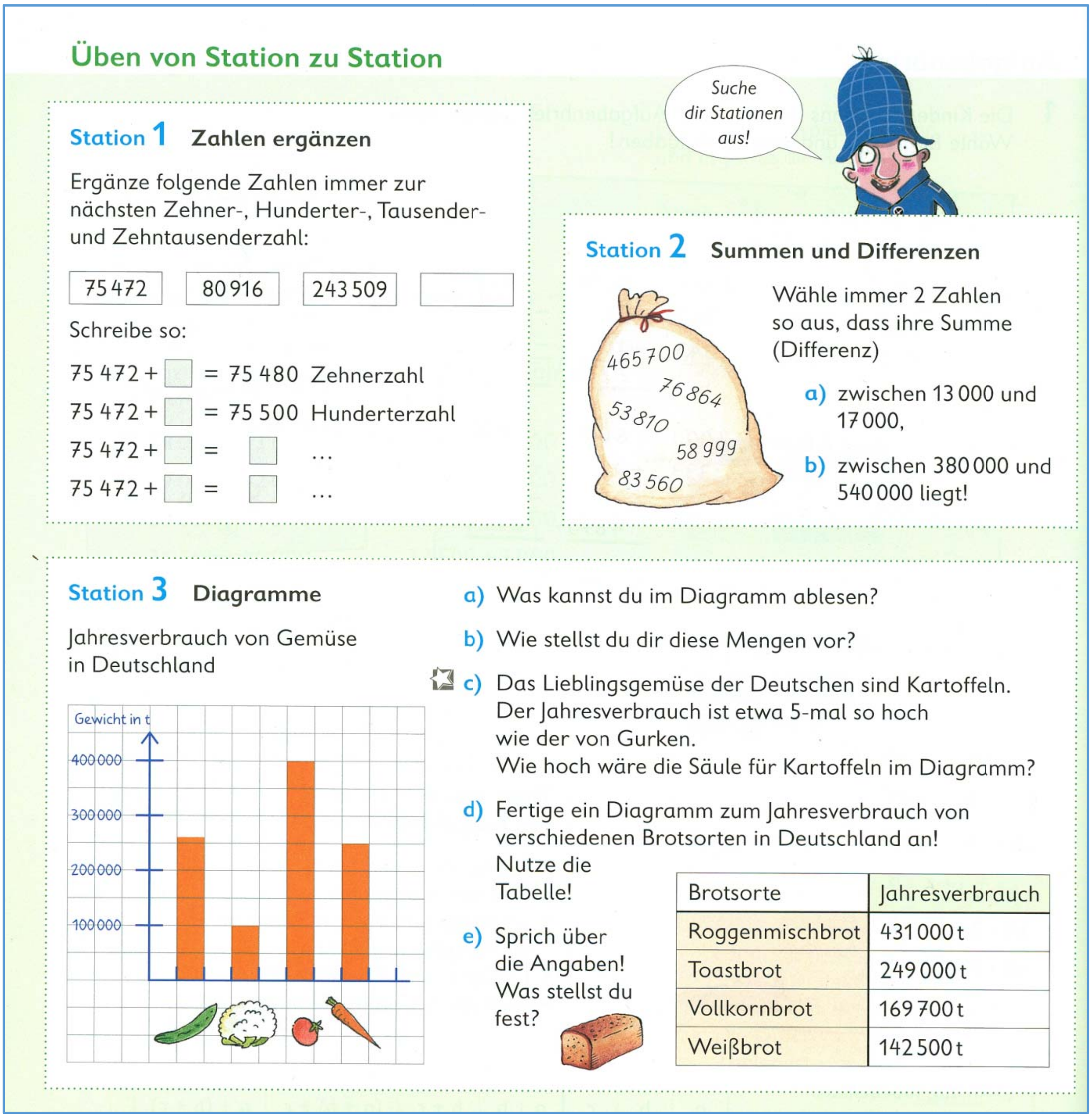
A. Für den Einsatz der eingangs geschilderten *Erkundungsaufgabe* wäre es Erfolg versprechender gewesen, den Kindern von vornherein eine Mitentscheidung über die soziale Lernform (Einzel-, Partner- oder Kleingruppenarbeit) einzuräumen, ggf. lediglich einzelne Vorschläge für eine flexible Gruppierung zu unterbreiten. Zudem hätte es sich entsprechend unserer jahrelangen Erfahrungen angeboten, den Kindern in der unmittelbaren Phase des Erforschen von Teilbarkeitsregeln Freiräume für ein individuelles Lernen zu lassen/ermöglichen. Dadurch kann sich jedes Kind zunächst gemäß seinem bevorzugten Lernstil mit dem Thema auseinandersetzen („Ich-Phase“). Danach könnten die Schüler/innen selbstbestimmend flexible Kleingruppen bilden, in denen sie sich untereinander in vertrauter Atmosphäre über ihre Entdeckungen, offene Fragen usw. austauschen und ggf. eine Präsentation ihrer Ergebnisse vorbereiten („Du-Phase“). Das

Vorstellen der Forscherergebnisse und der gemeinsame Austausch hierüber im Plenum („Wir-Phase“) würde schließlich speziell den kleinen Matheassen Chancen bieten, ihre jeweils gewonnenen Erkenntnisse zur Bereicherung aller „einzubringen“ (vgl. Käpnick, 2016, S. 173-187).

B. Das *Lernen an Stationen*, in der Literatur auch als Stationenbetrieb, Lernzirkel oder Lerntheke bezeichnet, dient im Mathematikunterricht hauptsächlich einem intensiven und differenzierenden Üben. Hierbei können die Schüler/innen einer Klasse in der Regel aus verschiedenen Themen eines Lernkomplexes selbstständig die für sie jeweils wichtigen Übungsinhalte auswählen, womit ihnen zum einen eine Eigen- und Mitverantwortung für ihr Lernen eingeräumt und zum anderen die Möglichkeit flexibler Gruppierungen gegeben wird (vgl. ebd.). In der Schulpraxis hat es sich bewährt, den Schülerinnen/Schülern im Rahmen einer Unterrichtsstunde drei bis fünf Übungsstationen mit jeweils Pflicht- und Wahl- bzw. Zusatzaufgaben anzubieten. Hierfür werden den Schülerinnen/Schülern die verschiedenen Themen üblicherweise an Tischen bzw. an Stationen in Form von Aufgabensets vorgegeben. Abbildung 2 zeigt exemplarisch ein solches Aufgabenangebot für den Mathematikunterricht einer vierten Jahrgangsklasse.

Der Einsatz eines solchen Stationenbetriebs erfordert von einer Lehrkraft stets eine gründliche vorausgehende Planung. Diese Tätigkeit umfasst das Bestimmen bzw. Vereinbaren von differenzierenden Lernzielen der Kinder und der hierzu gehörenden jeweiligen inhaltlichen Schwerpunkte jeder Lernstation, das Zusammenstellen und didaktische Aufbereiten entsprechender Aufgabensets sowie das Beachten von Möglichkeiten eines differenzenzierenden Übens und zugleich eines vorteilhaften gemeinsamen Lernens verschiedener Schüler/innen (vgl. ebd.). Für die Gestaltung des Stationenlernens bieten sich im Allgemeinen folgende Phasen an:

- ein einleitendes Gespräch zu den Zielen und Lernthemen der Stationen sowie zur Organisation und zu Verhaltensregeln beim selbstständigen Üben an den Stationen, ggf. auch ein kurzer „Stationenrundgang“ mit Erläuterungen zu den Aufgabensets und den Lernmitteln an jedem Gruppentisch,
- das Lernen in (flexibler) Einzel- oder Kleingruppenarbeit an den Stationen, wobei die Aufgabensets so zusammengestellt werden sollten, dass die Kinder in jeweils zehn bis 15 Minuten alle Aufgaben erfolgreich lösen können,
- eine gemeinsame Auswertung des Stationenlernens, in der die Schüler/innen über ihre Lernergebnisse in Bezug zu individuellen Förderplänen, über besondere Leistungen, ggf. über Fehler und noch weitere Übungsbedarfe sowie über ihr Sozialverhalten reflektieren (vgl. ebd.).



Üben von Station zu Station

Suche dir Stationen aus!

Station 1 Zahlen ergänzen

Ergänze folgende Zahlen immer zur nächsten Zehner-, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderzahl:

75 472 | 80 916 | 243 509 |

Schreibe so:

75 472 + ☐ = 75 480 Zehnerzahl
75 472 + ☐ = 75 500 Hunderterzahl
75 472 + ☐ = ☐ …
75 472 + ☐ = ☐ …

Station 2 Summen und Differenzen

465 700, 76 864, 53 810, 58 999, 83 560

Wähle immer 2 Zahlen so aus, dass ihre Summe (Differenz)

a) zwischen 13 000 und 17 000,

b) zwischen 380 000 und 540 000 liegt!

Station 3 Diagramme

Jahresverbrauch von Gemüse in Deutschland

a) Was kannst du im Diagramm ablesen?

b) Wie stellst du dir diese Mengen vor?

c) Das Lieblingsgemüse der Deutschen sind Kartoffeln. Der Jahresverbrauch ist etwa 5-mal so hoch wie der von Gurken. Wie hoch wäre die Säule für Kartoffeln im Diagramm?

d) Fertige ein Diagramm zum Jahresverbrauch von verschiedenen Brotsorten in Deutschland an! Nutze die Tabelle!

e) Sprich über die Angaben! Was stellst du fest?

Brotsorte	Jahresverbrauch
Roggenmischbrot	431 000 t
Toastbrot	249 000 t
Vollkornbrot	169 700 t
Weißbrot	142 500 t

Abb. 2: Übungsstationen zum Zahlenraum bis 1 000 000 im Mathematikunterricht einer 4. Jahrgangsklasse (Fuchs u.a., 2012, S. 78)

Unter dem Fokus von flexiblen Gruppierungen gibt es für den Einsatz des „Übens an Stationen“ verschiedene Möglichkeiten:

- Die Aufgaben werden mit allen Kindern zunächst gemeinsam erläutert, dann wählt jedes Kind selbst aus dem Angebot aus und bearbeitet selbstständig die Aufgaben (wodurch flexible Gruppen gebildet werden). Abschließend werden gemeinsam die Lernergebnisse ausgewertet.
- Die Kinder einer Klasse werden entsprechend der Anzahl der Übungsstationen in Gruppen eingeteilt, wobei ihnen hierbei ein Mitspracherecht eingeräumt wird. Dann bearbeiten die Kinder einer Gruppe gemeinsam nacheinander die Aufgaben der Übungsstationen (im Sinne eines „Zirkeltrainings“).
- Jedes Kind bearbeitet nacheinander die Aufgaben aller (bzw. von ausgewählten) Stationen als „Pflicht“. Leistungsstarke Kinder können zu jeder Station selbständig weitere Aufgaben ergän-

zen, diese lösen oder alternativ Mitschülerinnen/-schülern flexibel beim Üben der einzelnen Themen helfen (vgl. Käpnick 2014, S. 141).

Die Lehrkraft sollte in Abhängigkeit von den konkreten Zielen und Lernbedingungen (vorab) „vor Ort" entscheiden, welche der drei Organisationsmöglichkeiten sie nutzen will. Hinsichtlich des mehrfachen Wechselns von Lernthemen und des Lernortes gibt es wiederum unterschiedliche Vorgehensweisen. So könnte Schülerinnen/Schülern oder einer Kleingruppe, die alle Aufgaben an einer Station schneller als geplant lösen, Zusatzaufgaben angeboten werden. Alternativ wäre es möglich, diesen Kindern eine Extrastation zur Verfügung zu stellen (wobei sich für das in der Abbildung 2 dargestellte Lernthema z.B. das Lösen von Rechenrätseln anbieten würde) oder ihnen den Freiraum zu geben, selbstständig zu einer anderen Lernstation zu wechseln. Dafür ist es stets vorteilhaft, wenn an den Stationen Möglichkeiten der Selbstkontrolle gegeben sind. Dies können Musterlösungen der Aufgaben, aber auch codierte Hinweise zu Lösungen sein. Im Sinne der Förderung selbstregulierten Lernens empfiehlt es sich außerdem, dass die Kinder ihre Ergebnisse sowie Selbstreflexionen zu ihrem Lernverhalten in Lerntagebüchern oder Checklisten eintragen. Auf diese Weise hätten sie zugleich eine sehr gute Orientierungshilfe für das gemeinsame Auswertungsgespräch.

Literatur

Benölken, R. (2011). Mathematisch begabte Mädchen – Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter (Bd. 3 der Schriften zur mathematischen Begabungsforschung, hrsg. von F. Käpnick). Münster: WTM-Verlag.

Fuchs, M. (2006). Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Berlin: LIT.

Fuchs, M., Grohmann, W., Käpnick, F., Mirwald, E. & Münzel, C. (2012). Rechenwege Klasse 4. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2013). Besondere visuelle Vorstellungskompetenzen – ein markantes Merkmal mathematischer Begabungen? In F. Käpnick (Hrsg.), Mathematische Begabungen – Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven (S. 131-152). Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer Spektrum.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2016). Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

Offene substanzielle Aufgaben im Mathematikunterricht

1. Kennzeichen offener, mathematisch substanzieller Aufgaben(felder)

Entsprechend ihrer Bezeichnung müssen offene, mathematisch substanzielle Aufgaben(felder) zwei wesentliche Kriterien erfüllen:

- Sie müssen „substanziell" sein. Damit ist zum einen das Potenzial für reichhaltige und zugleich anspruchsvolle mathematische Lernaktivitäten und zum anderen die Möglichkeit zum Entdecken mathematischer Beziehungen gemeint. Somit können bereits Kinder durch das Bearbeiten substanzieller Aufgaben Mathematik (in Ansätzen) als ein offenes System mit theoriebildendem Charakter erleben (vgl. Käpnick, 2009, S. 5).
- Das Attribut „offen" kann sich auf verschiedene Aspekte einer Aufgabe bzw. eines Aufgabenfeldes beziehen. So kann die Aufgabe bzw. das Aufgabenfeld offen bzgl. der Lösung sein (d.h. es gibt nicht nur die eine richtige Lösung), bzgl. des Lösungsweges (d.h. verschiedene Lösungswege führen zu derselben Lösung) oder hinsichtlich beider, der Lösung und des Lösungsweges (d.h. es gibt verschiedene Lösungswege, die zu verschiedenen Lösungen führen, die alle mathematisch sinnvoll sind). Des Weiteren kann eine Aufgabe offen bzgl. der Wahl der Hilfsmittel oder der Ergebnisdarstellung sein (vgl. Käpnick, 2001, S. 18).

Damit entspricht das Bearbeiten offener substanzieller Aufgaben(felder) zum einen dem ureigenen Wesen von Mathematik, denn: „*Mathematik ist eine lebendige, sich entwickelnde und sich wandelnde Wissenschaft ….*" (Bedürftig & Murawski 2010, Vorwort), in der das Problemlösen als eine „*sehr verdienstvolle mathematische Tätigkeit*" (Polya, 1967, S. 16) gewürdigt wird. Und eine Hauptfunktion jeglichen Mathematikunterrichts besteht bekanntlich darin, ein adäquates Bild vom mathematischen Tun zu vermitteln. Zum anderen stellt das Bearbeiten einer solchen komplexen offenen Aufgabe eine „substanzielle Lernumgebung" dar, die wiederum dadurch charakterisiert ist, dass sie – in Übereinstimmung mit dem oben genannten Aspekt – zentrale Ziele, fundamentale Ideen und Prinzipien des Mathematiklernens repräsentiert und dass sie reichhaltige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten bietet. Die Aufgabe sollte an das jeweilige Niveau einer Lernenden/eines Lernenden (flexibel) „angepasst" werden können (vgl. Wittmann, 1995, S. 528).

2. Natürliche Differenzierung

Durch den Einsatz offener substanzieller Aufgaben kann das Prinzip der **natürlichen Differenzierung** realisiert werden. Im Gegensatz zur inneren oder äußeren Differenzierung, bei der die Einteilung nach Niveaustufen häufig durch die Lehrperson vorgenommen wird, geht die natürliche Differenzierung vom Kind selber aus. Alle Kinder erhalten das gleiche Lernangebot, d.h. alle Kinder bearbeiten eine gleiche, übergeordnete Problemfrage und erhalten dabei meist eine einzige Aufgabenstellung und ein einziges Arbeitsblatt. Dabei ist zu beachten, dass das Lernangebot dem Kriterium der „inhaltlichen Ganzheitlichkeit" bzw. einer gewissen Komplexität entspricht. Wichtig ist zudem, dass ein sinnvoller fachlicher Rahmen gegeben ist (vgl. Krauthausen & Scherer, 2010, S. 5-6). Jedes Kind entscheidet ausgehend von seinen individuellen Potenzialen, wie tief es in den mathematischen Inhalt einer Aufgabe eindringt. Zudem wählen die Kinder die Sozialform, verwendete Materialien und ihre bevorzugte Lösungsdarstellung selbst (vgl. z.B. Käpnick, 2016, S. 155).

Für eine Förderung mathematisch begabter Kinder sollten folgende allgemeine **Anforderungen** an offene Aufgaben erfüllt sein, die prinzipiell übertragbar sind auf die Förderung <u>aller</u> Kinder:

- Der jeweilige Inhalt einer (Ausgangs-)Aufgabe sollte Neugier und Interesse bei den Kindern wecken.
- Die Ausgangsaufgabe sollte für alle Kinder leicht verständlich sein, damit alle Kinder die Möglichkeit haben, sich erfolgreich mit der Aufgabe auseinanderzusetzen.
- Das Lösen der Ausgangsaufgabe sowie von Anschlussproblemen erlaubt bzw. fördert Eigenproduktionen der Kinder.
- Die Ausgangsaufgabe verfügt über eine reichhaltige mathematische Substanz und inhaltliche Offenheit (vgl. Käpnick, 2001, S. 18).

Sollen offene substanzielle Aufgaben im Regelunterricht und nicht in außerschulischen Förderprojekten zum Einsatz kommen, muss diese Liste um einige weitere Aspekte ergänzt werden:

- Die Aufgabensequenzen sollten den zeitlichen Rahmen einer Unterrichtsstunde möglichst nicht überschreiten, damit kein zusätzlicher organisatorischer Aufwand notwendig ist.
- Die Einstiegsaufgabe sollte nicht nur leicht verständlich, sondern möglichst auch leicht (von der Mehrheit der Schüler/innen) zu lösen sein.
- Alle Kinder sollten das gleiche „Aufgabenmaterial“, also z.B. alle Teilaufgaben einer Lernsequenz, erhalten, damit sich ggf. leistungsschwächere Schüler/innen nicht durch das Weglassen von Aufgabenteilen diskriminiert fühlen (vgl. Förster & Grohmann, 2008, S. 115-116).
- Weiterhin sollten die Aufgaben an die Vorgaben des Lernplans angepasst sein, sodass sie sinnvoll in den Regelunterricht integriert werden können. Sie können außerdem als ergänzende Inhalte dienen, die in „besonderen“ Stunden am Ende eines Schuljahres oder vor den Ferien angewendet werden.

Prinzipiell lassen sich, angelehnt an die Hauptmerkmale offenen Unterrichts, folgende didaktische Grundorientierungen nennen (vgl. Käpnick, 2016, S. 155):

- Die Selbst- bzw. Mitbestimmung der Lernenden bezüglich der Wahl von Unterrichtsinhalten, der Sozialformen, der Arbeitsmittel u.Ä. sind zentral.
- Die Rolle der Lehrperson besteht vorwiegend in einer eher zurückhaltenden und moderierenden Haltung. Vor allem dem individuellen prozessorientierten Diagnostizieren und Fördern kommt eine besondere Bedeutung zu.
- Die Lernangebote sollten Möglichkeiten zum aktiven und entdeckenden Lernen bieten.
- Die Arbeitsformen sollten im Sinne der Selbstverantwortung der Lernenden gestaltet werden.

Offenes Aufgabenfeld
„Domino-Zaubereien“/“Mathematik mit Domino-Steinen“

- Kopiervorlage ,,Domino-Zaubereien“
- Hinweise für die Lehrkraft
- Kopiervorlage Dominosteine

Einsatzbereich: Grundschule, Sekundarstufe I

Dominosteine bieten vielfältige Möglichkeiten zu mathematischen Tätigkeiten. Das vorliegende Aufgabenfeld ist ein Beispiel für eine offene substanzielle Aufgabe, die nach einer Einstiegsphase individuelle Entdeckungen der Schüler/innen ermöglicht. Weil als Vorkenntnisse nur Grundfertigkeiten in elementarer Arithmetik erforderlich sind, ist der Einsatz in Grundschule und Sekundarstufe möglich, wobei sich die Lösungen in Art und Niveau deutlich unterscheiden können. Im Folgenden sind deswegen Alternativen bei Aufgabenstellung und Lösungen enthalten.

Im Zentrum der Aufgabe stehen Entdeckungen zu jeweils vier zu einem Quadrat geordneten Dominosteinen, die so gebildet werden, dass die Zeilen- und Spaltensumme übereinstimmt. Der offenen Aufgabe ist eine Einstiegsphase vorangestellt, die mehrere Ziele verfolgt: Zum einen soll durch den motivierenden Einstieg mithilfe eines Zaubertricks das Interesse am Thema geweckt werden. Zum zweiten soll die Aufgabe dazu anregen, die Struktur der in einem Dominospiel vorhandenen Steine zu betrachten. Und drittens kann anhand dieser Aufgabe der Prozess der mathematischen Arbeitsweise thematisiert werden, um den Unterschied zwischen einer plausiblen und einer logisch schlüssigen und damit mathematisch korrekten Erklärung zu verdeutlichen.

Das Aufgabenmaterial eignet sich zum Einsatz im regulären Unterricht, als Aufgabe in einer Förderstunde mit begabten Schülerinnen/Schülern oder als Aufgabe zur selbstständigen Arbeit in einer Aufgabenkartei mit Lösungen.

BRITTA SJUTS & VERA KÖRKEL
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Bei der Bearbeitung des Aufgabenfeldes „Domino-Zaubereien“ werden im Bereich der **Primarstufe** vor allem folgende Kompetenzen gefördert:

Prozessbezogene Kompetenzen im Bereich **Problemlösen/kreativ sein**:

- Entnehmen der für die Lösung relevanten Informationen von Problemstellungen und Wiedergabe von Problemstellungen in eigenen Worten
- Zunehmend systematisches und zielorientiertes Probieren und das Nutzen von Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung
- Überprüfen von Ergebnissen auf ihre Angemessenheit, Finden und Korrigieren von Fehlern, Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungswege
- Erfinden von Aufgaben und Fragestellungen (z.B. durch Variation oder Fortsetzung von gegebenen Aufgaben)

Prozessbezogene Kompetenzen im Bereich **Argumentieren**:

- Aufstellen von Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten
- Testen von Vermutungen anhand von Beispielen und Hinterfragen von Vermutungen, Lösungen, Aussagen usw.
- Bestätigen oder Widerlegen von Vermutungen anhand von Beispielen und Entwicklung von ansatzweise allgemeinen Überlegungen oder Nachvollziehen dieser
- Erklären von Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und Nachvollziehen von Begründungen anderer Schüler/innen

Prozessbezogene Kompetenzen im Bereich **Darstellen/Kommunizieren**:

- Gemeinsames Bearbeiten komplexerer Aufgabenstellungen, Treffen von Verabredungen und in Beziehung-Setzen eigener und fremder Standpunkte
- Verwenden von geeigneten Fachbegriffen bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte, mathematischer Zeichen und Konventionen

Inhaltsbezogene Kompetenzen im Bereich **Zahlen und Operationen**:

- Richtiges Verwenden von Fachbegriffen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient, addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren)
- Entdecken von Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen sowie Beschreiben dieser unter Verwendung von Fachbegriffen (z.B. ist Vorgänger/Nachfolger von, ist Nachbarzehner/Nachbarhunderter von, ist die Hälfte/das Doppelte von, ist Vielfaches/Teiler von)
- Mündliches oder halbschriftliches Lösen von Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Anwendung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
- Nutzen von aufgabenbezogenen oder individuellen Strategien des Zahlenrechnens, eines schriftlichen Normalverfahrens oder Taschenrechners (z.B. als Rechenwerkzeug beim Erforschen von Zusammenhängen)

Bei der Bearbeitung des Aufgabenfeldes „Domino-Zaubereien“ werden im Bereich der **Sekundarstufe** vor allem folgende Kompetenzen gefördert:

Prozessbezogene Kompetenzen im Bereich **Argumentieren/Kommunizieren**:

- Sprechen über eigene und vorgegebene Lösungswege, Ergebnisse und Darstellungen, Finden, Erklären und Korrigieren von Fehlern
- Intuitives Nutzen verschiedener Arten des Begründens (Beschreiben von Beobachtungen, Plausibilitätsüberlegungen, Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen)

Prozessbezogene Kompetenzen im Bereich **Problemlösen**:

- Finden möglicher mathematischer Fragestellungen in einfachen Problemsituationen
- Anwenden der Problemlösestrategien „Beispiele finden“, „Überprüfen durch Probieren“

- Deuten von Ergebnissen in Bezug auf die ursprüngliche Problemstellung

Inhaltsbezogene Kompetenzen im Bereich **Arithmetik/Algebra**:

- Ausführen der Grundrechenarten (Kopfrechnen und schriftliche Rechenverfahren).
- Anwenden arithmetischer Kenntnisse von Zahlen und Größen, Nutzen von Strategien für Rechenvorteile, von Techniken des Überschlagens und der Probe als Rechenkontrolle.
- Bestimmen von Anzahlen auf systematische Weise

Inhaltsbezogene Kompetenzen im Bereich **Funktionen**:

- Erkunden von Mustern in Beziehungen zwischen Zahlen und Aufstellen von Vermutungen

Literatur

Bedürftig, T. & Murawski, R. (2010). Philosophie der Mathematik. Berlin: De Gruyter.

Benölken R., Berlinger, N. & Käpnick, F. (2016). Offene substanzielle Aufgaben und Aufgabenfelder. In F. Käpnick (Hrsg.), Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule (S. 157-172). Seelze: Kallmeyer Verlag.

Beutelspacher, A. & Wagner, M. (2012). Warum Kühe gerne im Halbkreis grasen... und andere mathematische Knobeleien. Freiburg: Herder.

Förster, F. & Grohmann, W. (2008). Möglichkeiten der Begabtenförderung im Unterricht durch natürliche Differenzierung. In M. Fuchs & F. Käpnick, F. (Hrsg.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (S. 113-123). Berlin: Lit Verlag.

Glaeser, G. (Hrsg.) (1980). Didaktik mathematischer Probleme und Aufgaben. Braunschweig: Vieweg.

Hemme, H. (2002). Der Wettlauf mit der Schildkröte. 100 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse Klasse 3/4, Empfehlungen zur Förderung mathematisch begabter und interessierter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Band 1. Berlin: Cornelsen.

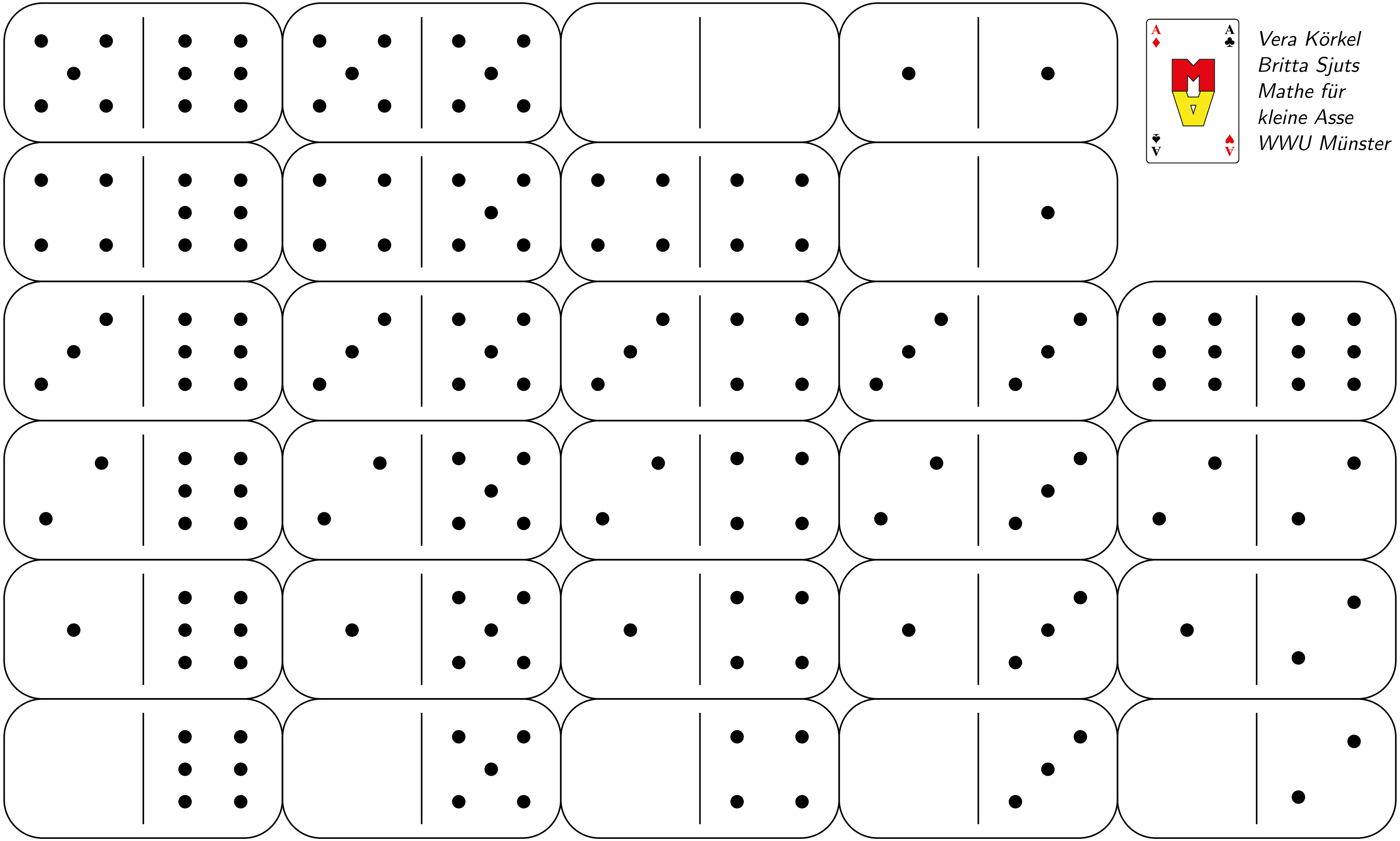
Käpnick, F. (2009). Mathe für kleine Asse Klasse 3/4, Empfehlungen zur Förderung mathematisch begabter und interessierter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Band 2. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2016). Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Kallmeyer Verlag.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Kiel: IPN.

Polya, G. (1967). Vom Lösen mathematischer Aufgaben (Bd. 2). Basel, Stuttgart: Birkhäuser.

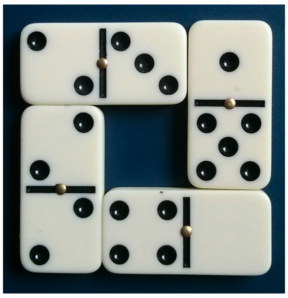
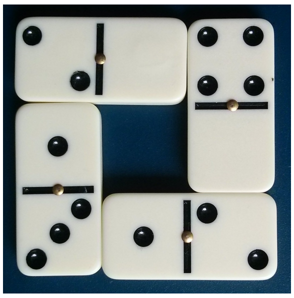
Wittmann, E. C. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 528-531). Hildesheim: Franzbecker.



Vera Körkel
Britta Sjuts
Mathe für
kleine Asse
WWU Münster

Domino-Zaubereien

Was fällt dir bei folgenden 4er-Dominorahmen auf?

Finde weitere interessante Rahmen. Entwickle Fragestellungen und versuche sie selbst zu lösen.

Du darfst dir dabei selbst überlegen, wie du das Problem veränderst, z.B. welche Summe, welche Rahmengröße, welche Steine erlaubt sind etc. Formuliere dabei schriftlich konkrete Problemstellungen, die du dann löst.

1. Fragestellung: ____

____

Lösung:

2. Fragestellung: ____

____

Lösung:

Gestaltungsmöglichkeiten für forschendes Lernen kleiner Mathe-asse im Mathematikunterricht

1. Kernidee forschenden Lernens

Die *Grundidee* forschenden Lernens von Schülerinnen/Schülern besteht darin, dass die Lernenden eine für sie subjektiv bedeutsame und zugleich herausfordernde Problemaufgabe entwickeln. Diese versuchen sie eigenverantwortlich zu lösen und dann die erhaltenen Ergebnisse zu prüfen, darzustellen und zu präsentieren sowie über ihre eigenen Lerntätigkeiten rückblickend zu reflektieren. Dieser im Idealfall selbstbestimmte und im Allgemeinen sehr komplexe Lernprozess, in dessen Ergebnis die Schüler/innen neue Erkenntnisse gewinnen, lässt sich gut in Form eines Forschungszyklus modellieren (vgl. Wege in der Begabungsförderung, S. A58; Hauer, 2014, S. 27-30).
Die besondere und zugleich fundamentale Bedeutung forschenden Lernens im Mathematikunterricht spiegelt sich darin wider, dass ein solches offenes und problemorientiertes Lernen dem Wesen mathematischen Tuns entspricht. So charakterisiert Kießwetter (professionelles) mathematisches Tätigsein als einen *„Prozeß, der stets bei interessanten Problemstellungen beginnt, sich manchmal mit der Lösung der Einzelprobleme begnügt, und manchmal sogar begnügen muß, zumeist jedoch in systematischen Darstellungen von mathematischen Teilgebieten wie Algebra, Geometrie, Analysis, Funktionstheorie, Theorie der Differentialgleichungen, Zahlengleichungen usw. mündet.“* (Kießwetter, 1991, S. 11)
Kießwetter kann mit seinem Team im Hamburger Projekt zur Förderung mathematisch begabter Schüler/innen vom 7. bis zum 13. Schuljahr anhand von zahlreichen Fallbeispielen überzeugend belegen, dass Matheasse im höheren Schulalter ein solches forschend-entdeckendes Lernen erfolgreich realisieren können (vgl. z.B. Zimmermann, 1986). Es gibt aber ebenso viele erprobte Beispiele dafür, dass sich bereits mathematisch begabte Kinder[1] im Primarstufenalter begeistert Forscherthemen aus der „Zahlen- und Figurenwelt“ zuwenden und in der Lage sind, kleine mathematische „Mini-Theorien“ zu entwickeln. Dies wird im Folgenden am Beispiel eines konkreten Aufgabenfeldes aufgezeigt.

2. Beispiel forschenden Lernens im Mathematikunterricht: Entdeckungen auf dem Hunderterfeld

Das Aufgabenfeld „Entdeckungen auf dem Hunderterfeld“ eignet sich für Dritt- oder Viertklässler/innen. Im Hunderterfeld sind bekanntlich die Zahlen von 1 bis 100 nach einer einfachen Struktur angeordnet: Entsprechend unserem dekadischen Stellenwertsystem werden in einem 10x10-Quadratfeld jeweils zehn Zahlen gemäß der Zählreihenfolge von links oben beginnend platziert (vgl. Abb. 1). Auf diese Weise ergibt sich eine Vielzahl leicht erkennbarer Zahlen- und Rechenmuster, wie z.B.:

- In jeder Zeile und in jeder Spalte stehen 10 Zahlen.
- Die letzte Spalte enthält Zahlen aus der Malfolge der 10.
- Alle Zahlen einer Spalte haben jeweils die gleiche Einerzahl.
- Die Differenz zwischen zwei direkt untereinander stehenden Zahlen ist in jeder Spalte 10.

Wenn man sich in die Zahlenstruktur vertieft, kann man viele weitere, auch bedeutend „substanziellere“ Zahlen- und Rechenbeziehungen entdecken, diese in Form mathematischer Sätze angeben und deren Gültigkeit begründen bzw. beweisen. Damit ist zugleich die thematische Schwerpunktsetzung für ein forschendes Lernen von Dritt- oder Viertklässlerinnen/-klässlern gekennzeichnet. Der entspre-

[1] Das forschende Lernen eignet sich zwar im Besonderen für mathematisch begabte Kinder, da es deren individuellen Potenzialen und Interessen sehr gut entspricht. Diese Methode bietet sich aufgrund der vielfältigen Lernpotenziale (vgl. Abschnitt 3) aber ebenso gut für alle Kinder an und sollte demgemäß im Mathematikunterricht als eine Leitidee umgesetzt werden.

chende „*Forscherauftrag*“ könnte nach einer kurzen Hinführung zum Thema, in der etwa die oben exemplarisch aufgelisteten einfachen Zahlen- und Rechenmuster angesprochen werden, wie folgt lauten:
„Das Hunderterfeld enthält viele weitere, auch spannende oder verblüffende Zahlen- und Rechenmuster. Versucht solche Muster zu entdecken. Formuliert sie genau und begründet jeweils, warum die Zusammenhänge gelten.“
Der Forscherauftrag ist bewusst sehr offen angegeben, sodass jedes Kind entsprechend seinen Leistungspotenzialen und inhaltlichen Präferenzen mathematisch produktiv tätig sein kann. Für die Forschertätigkeit sollte den Kindern jeweils mindestens ein Hunderterfeld zur Verfügung gestellt werden:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb. 1: Hunderterfeld

Für die verschiedenen Lernphasen (Suchen und Bestimmen interessanter Fragestellungen, Lösen von Aufgaben, Darstellen und Präsentieren der Lösungen, Reflektieren über die Lerntätigkeiten, Finden von Anschlussproblemen usw.) sollte den Kindern ein größtmöglicher Freiraum geboten werden. So sollten sie z.B. selbst entscheiden, ob sie allein, zu zweit oder in Kleingruppen forschend lernen, ob sie ggf. weitere Hilfsmittel nutzen oder ob sie Impulse für bzw. Zwischenrückmeldungen zu Aufgaben- oder Lösungsideen erhalten wollen.
Bei unseren Erprobungen erkannten und thematisierten kleine Matheasse des dritten und vierten Schuljahres z.B. folgende Zahlen- und Rechenbeziehungen:

- Die Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen auf einer „schrägen Linie“ von links oben nach rechts unten beträgt immer 11. Das gilt in entsprechender Weise für alle gleichgerichteten „schrägen Linien“. Eine solche Linie enthält Zahlen aus der Malfolge der 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.
- Die Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen auf einer „schrägen Linie“ von rechts oben nach links unten beträgt immer 9. Das gilt in entsprechender Weise für alle gleichgerichteten

„schrägen Linien“. Eine solche Linie enthält Zahlen aus der Malfolge der 9: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

- Die Zeilensummen vergrößern sich von der ersten bis zur zehnten Zeile um jeweils (10·10 =) 100.
- Die Spaltensummen vergrößern sich von der ersten bis zur zehnten Spalte um jeweils (10·1 =) 10.

Die Begründungen für die allgemeine Gültigkeit der Zahl- und Rechenbeziehungen ergeben sich jeweils aus der Zahlstruktur des Hunderterfeldes, sodass auch Dritt- oder Viertklässler/innen die Zusammenhänge erklären können. So argumentierte z.B. Emma (9 Jahre, 3. Schuljahr) bzgl. der Zeilensummen: *„Wenn man die Zahlen in zwei genau untereinander stehenden Zeilen vergleicht, dann ist jede Zahl in der unteren Zeile um 10 größer als die darüberstehende Zahl der anderen Zeile. Weil immer zehn Zahlen in einer Zeile stehen, ergibt das dann 10 mal 10 gleich 100 als Unterschied zwischen zwei direkt untereinanderstehenden Zeilensummen.“*
In einer Viertklässler/innengruppe fokussierten sich mehrere Kinder auf weitere interessante Summenbildungen, wie beispielsweise (nach einem Impuls unsererseits) auf die Frage:
Wie kann man geschickt alle Zahlen eines 3x3-Zahlenfeldes zusammenzählen?

1	2	3
11	12	13
21	22	23

Abb. 2: Beispiel eines 3x3-Zahlenfeldes

Die Aufgabe weckte spontan das Interesse vieler Kinder und sie entdeckten schnell entscheidende Zahlbeziehungen: Man erhält viermal die gleiche Summe aus zwei Zahlen des 3x3-Feldes: 1 + 23 = 2 + 22 = 3 + 21 = 11 + 13 = 24. Max erkannte daraufhin intuitiv: *„Das ist ja 4 mal 24 und dann kommt noch 12 als Mittezahl hinzu.“* Hierauf meinte Luka: *„4 mal 24 und 1 mal 12 ist doch zusammen 9 mal 12. Die Formel heißt also 9 mal die Mitte.“*
Somit hatten die Viertklässler/innen in der Forscherphase eine allgemeingültige Formel für die Bestimmung der Summe aller neun Zahlen in einem 3x3-Zahlenfeld hergeleitet – ein authentischer Beleg dafür, dass bereits Grundschulkinder mathematische Mini-Theorien im Sinne des Vermutens, Darstellens und Begründens allgemeiner Zusammenhänge entwickeln können.
Eine Fortsetzung der Theoriebildung regte im weiteren Verlauf Carla an. Sie warf die Frage auf, wie man geschickt alle 100 Zahlen des Hunderterfeldes addieren könnte. Das Mädchen erinnerte sich in diesem Zusammenhang an die berühmte Legende über Karl-Friedrich Gauß, der dieses Problem als Achtjähriger im Unterricht innerhalb weniger Minuten löste. Stolz erläuterte Carla Gauß‘ Trick: *„Es ist im Prinzip so wie beim 3x3-Zahlenfeld. Man bildet immer die Zahlenpaare mit der gleichen Summe. Ein erstes solches Paar ist 1 und 100, dann 2 und 99 usw. Man erhält 50 Mal das Ergebnis 101. Das ergibt … 5 050.“* …
Während Grundschulkinder die Gültigkeit solcher formelmäßigen Zusammenhänge altersgemäß auf verbaler Ebene anhand der Grundstruktur der Zahlenanordnung auf dem Hunderterfeld begründen, könnten Schüler/innen der Sekundarstufen die Formeln auch algebraisch beweisen, indem sie beispielsweise die Mittelzahl eines 3x3-Zahlenfeldes mit n (als eine beliebige natürliche Zahl mit 11 < n <90 und n ≠ 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 20, 30, 40 50, 60 70, 80) festlegen.

Hieraus ergibt sich folgende allgemeine Struktur eines beliebigen 3x3-Zahlenfeldes im Hunderterfeld:

n-11	n-10	n-9
n-1	n	n+1
n+9	n+10	n+11

Abb. 3: Allgemeine Struktur eines beliebigen 3x3-Zahlenfeldes im Hunderterfeld

Als Summe erhält man folglich:
$(n-11) + (n-10) + (n-9) + (n-1) + n + (n+1) + (n+9) + (n+10) + (n+11) = 9 \bullet n$.
Als mögliche Anschlussprobleme für kleine Matheasse in den Sekundarstufen bieten sich demgemäß analoge algebraische Beweise für andere, z.T. bereits angesprochene Zahlbeziehungen an.[2]

3. Besondere Lernpotenziale Forschenden Lernens im Mathematikunterricht

Neben der eingangs genannten prinzipiellen Übereinstimmung Forschenden Lernens mit dem Wesen mathematisch-produktiven Tätigseins und des hieraus resultierenden Erfahrens „echter“ Mathematik durch die Schüler/innen beinhaltet diese Organisationsform viele weitere bedeutsame und zugleich eng miteinander verknüpfte Lernpotenziale.
Zum einen kann mit dem Forschenden Lernen ein wesentlicher Beitrag zur Realisierung aller *prozessbezogenen Kompetenzen mathematischer Allgemeinbildung* (vgl. Käpnick, 2014, S. 19-24) geleistet werden. Wie am vorgestellten Forscherthema „Entdeckungen auf dem Hunderterfeld“ erkennbar, bietet Forschendes Lernen generell sehr gute Chancen,

- die Problemlösekompetenzen,
- Kompetenzen im Kommunizieren (im Beschreiben eigener Vorgehensweisen, im Verstehen von Lösungswegen der Mitschüler/innen und im gemeinsamen Reflektieren darüber, im sachgerechten Verwenden mathematischer Fachbegriffe und Symbole),
- die Argumentationskompetenzen (Fähigkeiten im Hinterfragen und im korrekten Prüfen von Aussagen, im Entwickeln von Vermutungen, im Erkennen und Herstellen von Zusammenhängen, im Begründen bzw. Beweisen von Behauptungen),
- Kompetenzen im Modellieren (Fähigkeiten im Entnehmen relevanter Informationen aus gegebenen komplexen Darstellungen, im „Übersetzen“ von Sachinformationen in die mathematische Fachsprache, einschließlich in symbolische bzw. formelmäßige Ausdrücke),
- die Darstellungskompetenzen (Fähigkeiten im Entwickeln verständlicher, eindeutiger und mathematisch korrekter Darstellungen von Sachverhalten und Zusammenhängen, im Vergleichen und Bewerten verschiedener Darstellungen)

der Schüler/innen zielgerichtet zu fördern.
Zum anderen können mit dem Forschenden Lernen auch wichtige *spezifische Aspekte der individuellen Förderung und Ausprägung mathematischer Begabungen* entwickelt werden. Diesbezüglich lassen sich insbesondere anfügen:

- die Förderung selbstbestimmten und eigenverantwortlichen Lernens,
- die Förderung und Vertiefung der Freude am Problemlösen sowie an intellektueller Neugier,

[2] Zahlreiche weitere erprobte Aufgabenmaterialien für Forschendes Lernen mit mathematisch begabten Kindern vom dritten bis zum achten Schuljahr findet man in vielen im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen.

- die Stärkung der Selbstkonzepte kleiner Matheasse und hierin eingeschlossen das Finden und Entwickeln eigener Lern- und Problemlösestile,
- das Anreichern eines adäquaten „Bildes“ von der Vielfalt mathematisch substanzieller Tätigkeiten.

4. Didaktische Voraussetzungen für ein gelingendes Forschendes Lernen

Das vorgestellte Beispiel zum Forschenden Lernen zeigt auf, dass ein erfolgreicher Einsatz dieser offenen Organisationsform schulischen Lernens hohe Ansprüche sowohl an eine Lehrkraft als auch an die jeweiligen mathematischen Aufgaben stellt.
Eine *Grundanforderung an die Lehrkraft* besteht in ihrer fachlichen Kompetenz, die es ihr erlaubt, flexibel und souverän mit den kreativen Ideen der Kinder umzugehen. Dies schließt beispielsweise ein, die jeweilige mathematische Substanz einer Schüler/innenaussage zu erkennen und diese angemessen zu würdigen, ggf. auch behutsam korrigierend einzuwirken, inhaltliche Gedanken einer Schülerin bzw. eines Schülers aufzugreifen und entsprechende Impulse für ein sinnvolles vertiefendes Eindringen in ein mathematisches Thema zu geben oder generell als Ansprechpartner/in für das mathematisch-produktive Forschen von Schülerinnen/Schülern zu dienen. Darüber hinaus sollte die Lehrkraft folgende allgemeine *didaktische Kompetenzen* aufweisen:

- Vertrauen in die Problemlösekompetenzen aller Kinder haben,
- die „Kunst der pädagogischen Zurückhaltung“ beherzigen,
- Kindern zubilligen, selbst über ihre Organisationsform, über die Nutzung von Arbeitsmaterialien, über ihren Lösungsweg, die Lösungsdarstellung, usw. zu entscheiden,
- Kindern beim Finden und Entwickeln ihrer individuell bevorzugten Problemlösestile helfen,
- ausreichend Zeit für die Phase der Problembearbeitung sowie der Ergebnispräsentation und -diskussion einplanen (vgl. Käpnick, 2014, S. 124-125).

Von maßgeblicher Bedeutung für ein gelingendes Forschendes Lernen ist zugleich die Qualität der „Forscheraufgabe“. Wichtige allgemeine *Anforderungen an eine solche mathematische Problemaufgabe* bestehen in Folgendem:

- Möglichst alle Kinder sollten eine Chance haben, sich mit der Aufgabe erfolgreich auseinander zu setzen.
- Der Aufgabeninhalt sollte für möglichst alle Kinder interessant bzw. motivierend sein.
- Der Aufgabeninhalt soll eine inhaltliche Vielfalt und Offenheit gewährleisten (reichhaltige mathematische „Substanz“).
- Es sollte eine Offenheit bzgl. der Wahl von Lösungswegen, von Hilfsmitteln und der Ergebnisdarstellungen bestehen (vgl. Käpnick, 2014, S. 125).

Die aufgelisteten Anforderungen an die Lehrkraft und an eine mathematische Aufgabe scheinen selbstverständlich zu sein. Wer jedoch Erfahrungen mit einem solch offenen Forschenden Lernen sammeln konnte, weiß, dass diese keinesfalls leicht umsetzbar sind. So fällt es Lehrkräften oft schwer, den Kindern genügend Zeit zum Finden einer Lösungsidee zu geben oder sie (scheinbare) Irrwege gehen zu lassen (die sich übrigens später meist als kreativ und/oder als inhaltlich bereichernd herausstellen). Hinsichtlich der Aufgabeninhalte bzw. -präsentation besteht ein weit verbreiteter Irrtum darin, dass nur oder hauptsächlich eine Einkleidung des mathematischen Problemfeldes in die Lebensumwelt die notwendige Motivation und das Interesse von Schülerinnen/Schülern weckt. Das im Abschnitt 2 vorgestellte authentische Beispiel für Forschendes Lernen kann als Beleg dafür dienen, dass Kinder solche Einkleidungen nicht benötigen, wenn die mathematische Substanz einer Problemaufgabe reichhaltig ist und diese ihnen spannende mathematische Entdeckungen erwarten lässt.

Literatur

Bardy, P. & Hrzan, J. (2006). Aufgaben für kleine Mathematiker mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln: Aulis.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler (Bd. 2). Berlin: Volk und Wissen.

Hauer, B. (2014). Entwicklung didaktischer Kompetenzen durch forschendes Lernen. Aachen: Shaker Verlag.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler (Bd. 1). Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. (2010). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern. Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer Spektrum.

Kießwetter, K. (1991). „Mathematische Begabung“ – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. Der Mathematikunterricht, H. 1/1991, 5-18.

Rodeck, K. (2006). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler. Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom Einspluseins zum Einmaleins (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. &Müller, G. (1992). Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen (Bd. 2). Stuttgart: Klett

Zimmermann, B. (1986). Mathematisch hochbegabte Schüler – Das Hamburger Modell. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 3/1986,98-106.

Nina Berlinger
Ann-Katrin Brüning
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Stationenlernen „Mathematische Weltreise“

Altersstufe: Klassenstufen 4 bis 6

Allgemeines

Die Unterrichtseinheit bzw. die außerunterrichtliche Fördereinheit „Mathematische Weltreise“ ist als Stationenlernen organisiert, bei dem die Kinder vier verschiedene Stationen (beliebige Erweiterungen möglich) zu unterschiedlichen mathematischen und inhaltlichen Schwerpunkten durchlaufen, wobei sie die Sozialform (Einzel-, Partner- oder Kleingruppenarbeit) selbstständig wählen dürfen. Das Stationenlernen „Mathematische Weltreise“ zeigt u.a. Querverbindungen zum Sach- und Kunstunterricht auf, sodass fächerübergreifendes Lernen realisiert werden kann.
Die Stationen sind an Kontinente gebunden, welche durch „Flüge“ miteinander verknüpft sind. Die „Flugzeiten“ sollten individuell gestaltet sein, wodurch die Kinder die Möglichkeit haben, die Stationen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlicher Reihenfolge zu wechseln und dort unterschiedlich lange zu verweilen. Natürlich müssen die Kinder auch nicht alle Stationen anfliegen. Wenn die Kinder noch sehr unerfahren mit Stationenlernen sind und an diese Methode erst herangeführt werden müssen, ist es möglich, das Stationenlernen eher gelenkt anzubieten und genaue Vorgaben zum Zeitpunkt und zur „Richtung“ des Wechsels zu machen.
Die Kinder erhalten zu Beginn der Förderstunde einen persönlichen Reisepass, der für das Lernen an den Stationen als Merkzettel dient. Dort wird die individuelle „Flugroute“ festgehalten und dort können die Kinder ihre an den Stationen gesammelten Aufgabenzettel und Lösungen sammeln. Dadurch behalten die Kinder den Überblick über bereits bearbeitete und noch mögliche anzufliegende Stationen. Wenn die Organisationsform stärker gelenkt realisiert werden soll, könnten die Reisepässe eine jeweils unterschiedliche Zahlenfolge enthalten, welche die Einteilung in Kleingruppen bestimmt und damit auch die jeweilige „Startstation“.
Das Stationenlernen kann im Rahmen von zwei bis vier Unterrichtsstunden durchgeführt werden.
Die einzelnen Stationen entsprechen im Groben den Anforderungen an offene Problemfelder. Außerdem greifen sie verschiedene mathematische Schwerpunkte auf und sind somit abwechslungsreich. Inhaltlich sind die Aufgaben an die Charakteristika und Besonderheiten der Kontinente gebunden (s. Kennzeichnung der Stationen).

Je nach individuellem Leistungsniveau der Kinder müssen die Forschungsaufträge der einzelnen Stationen ggf. angepasst werden.

Empfehlungen zum Ablauf

Materialien

- Kopiervorlagen, Papier zum Notieren der Lösungen
- Laufzettel in Form eines Reisepasses
- Materialien an den Stationen, wie Maßbänder, Tangram-Spiele, Bücher über verschiedene Länder, Atlanten
- ev. Stempel und Stempelkissen an den einzelnen Stationen
- ev. Visualizer

Einstiegsphase (ca. 10 Minuten):

In dieser Phase sollen die Kinder auf das Lernen an Stationen vorbereitet werden. Es müssen das Thema sowie deren Organisation vorgestellt werden. Als stummer Impuls könnte eine Weltkarte

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

dienen, so dass sich ein Gespräch über unterschiedliche Kontinente und Länder mit den persönlichen Vorerfahrungen der Kinder entwickelt. Abschließend werden den Kindern ihre persönlichen Reisepässe ausgeteilt. Die Kinder finden sich ev. zu „Reisegruppen“ zusammen (wenn sie in Kleingruppen arbeiten möchten) und „fliegen“ dann gemeinsam, zu zweit oder alleine zu ihrem ersten Kontinent.

Forschungsphase (unterschiedliche Zeitrahmen möglich, ca. 1-3 Unterrichtsstunden)
Die Kinder durchlaufen in Einzel-, Partner- oder Kleingruppenarbeit die Stationen und reisen dabei von Kontinent zu Kontinent. Die Aufgabenzettel und Lösungen sammeln sie in einer Mappe, welche sie mit auf ihre Reise nehmen. Die Kinder wechseln die Stationen selbstverantwortlich. Die einzelnen Stationen können auf unterschiedliche Räumlichkeiten verteilt sein.

Auswertungs-/Reflexionsphase (ca. 20 Minuten)
Alle Kinder finden sich wieder im Klassenraum ein und haben die Möglichkeit, von ihrer individuellen mathematischen Weltreise zu berichten. Dabei kann es je nach vorheriger Absprache um Lernwege, Lernergebnisse inklusive verschiedener Fehler und Strategien, Sozialverhalten, persönliche Reflexionen bzgl. selbstgesetzter Ziele u.ä. gehen. Es sollten die Leistungen **aller** Kinder gewürdigt werden. Dabei ist es äußerst hilfreich, wenn die schriftlich festgehaltenen Lösungen der Kinder per Visualizer an die Wand projiziert werden.

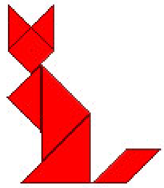
NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Kennzeichnung der Stationen

Station 1 – Afrika

thematischer Schwerpunkt: Erkundung der Tierwelt in Afrika anhand von Fermi- bzw. Sachaufgaben
mathematischer Schwerpunkt: Sachrechnen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Größen und Messen
Prozessbezogene Kompetenzen: Problemlösen/kreativ sein; Modellieren, Argumentieren, Darstellen/Kommunizieren

Station 2 – Asien



thematischer Schwerpunkt: Erkundung des Tangramspiels
mathematischer Schwerpunkt: Geometrie
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Umgang mit Raum und Form
Prozessbezogene Kompetenzen: Problemlösen/kreativ sein, Modellieren, Darstellen/Kommunizieren

Station 3 – Mittelamerika

thematischer Schwerpunkt: Erkundung anderer Zahl- und Rechensysteme am Beispiel des Vigesimalsystems des Maya-Volks
mathematischer Schwerpunkt: Arithmetik
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Umgang mit Zahlen und Operationen
Prozessbezogene Kompetenzen: Problemlösen/kreativ sein, Modellieren, Argumentieren, Darstellen/Kommunizieren

Station 4 – selbstgewählter Kontinent

Freie Station, an der die Kinder selbstständig Aufgaben zu weiteren Kontinenten entwickeln und mit selbstgewählten Methoden arbeiten (dabei können das Internet und verschiedene Bücher genutzt werden)

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Station 1: Afrika – Staunen über die Tierwelt

In Afrika gibt es eine sehr vielfältige Tierwelt: Störche, Strauße, Geparden, Elefanten, Löwen, Giraffen, Kamele, Schlangen, … und sie leisten Erstaunliches. Hierüber kannst du in den folgenden kleinen Steckbriefen viel erfahren und dabei die Leistungen der Tiere mit deinen sportlichen Bestleistungen vergleichen.

Meine Bestleistungen:

50-m-Lauf: ________ s

100-m-Lauf: ________ s

1000-m-Lauf: ________ min

Weitsprung: ________ m

1-km-Fahrradfahren: ________ min

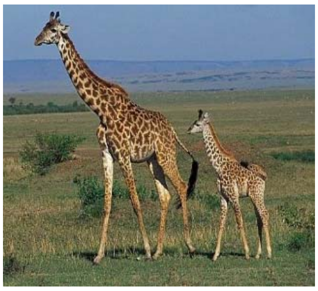
NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

1. Wenn Störche im Frühling aus Afrika nach Deutschland fliegen und im Herbst wieder nach Nordafrika zurückkehren, legen sie dabei insgesamt etwa 10 000 km zurück. Die hervorragenden Flieger haben eine Flügelspannweite von bis zu 2,20 m und erreichen eine Geschwindigkeit von 45 km pro Stunde. Auf ihrem Flug nach Afrika fliegen sie pro Tag 200 km bis 300 km und sind dabei 8 bis 10 Stunden in der Luft.
   Wie viele Tage dauert ungefähr ein Hin- oder Rückflug der Störche?
   Wie lange würdest du brauchen, um 5 000 km mit dem Fahrrad zu fahren?

2. In afrikanischen Halbwüsten und Savannen lebt der Strauß. Der größte Vogel der Erde kann bis 3,00 m groß und 150 kg schwer werden.
   Er macht bis 3,00 m lange Schritte und erreicht eine Spitzengeschwindigkeit von 70 km pro Stunde. Eine halbe Stunde lang halten Strauße eine Geschwindigkeit von 50 km pro Stunde durch.
   Wie lange braucht dann ein Strauß für eine 25km lange Strecke?
   Wie lang sind deine Schritte beim Laufen und wie lange brauchst du etwa, um 25 km zu laufen?

3. Der Gepard ist das schnellste Landtier der Erde. Die in Mittel- und Südafrika lebenden Tiere können eine Rekordgeschwindigkeit von 120 km pro Stunde erreichen. Dieses Tempo halten die 1,40 m bis 2,50 m großen Tiere aber nur 500 m lang durch. Die Zeit reicht aber meist aus, um Beute zu fangen.
   Wie lange braucht ein Gepard etwa, um 500 m zu laufen?
   Wie lange brauchst du ungefähr für diese Strecke?

4. Giraffen können etwa 4,50 m lang und bis zu 5,50 m hoch werden. Davon nimmt allein der Hals etwa ein Drittel der Körperhöhe ein. Um ihr Gehirn mit Blut zu versorgen, muss das Herz einer Giraffe deshalb ganz schön schuften. Ihr Herz ist aber auch besonders groß, und zwar 60 cm lang und 11 kg schwer.
   Könnte eine Giraffe im Klassenzimmer stehen?
   Vergleiche die Länge und das Gewicht eines Giraffenherzes mit den Maßen deines Herzes.



NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

5. Der afrikanische Elefant ist das größte Landtier der Erde. Die bis 4 m großen und bis 6 Tonnen schweren Vegetarier brauchen täglich etwa 150 kg Nahrung. Dazu nehmen sie sich 16 bis 18 Stunden am Tag Zeit und trinken auch 80 Liter Wasser.
   Wie viel Kilogramm Nahrung und wie viele Liter Flüssigkeit nimmst du ungefähr täglich auf?
   Wie viele Tage würdest du ungefähr brauchen, um die tägliche Nahrungsaufnahme eines Elefanten zu erreichen?

6. Die in Nordafrika lebenden Kamele können in der größten Wüstenhitze mehr als 10 Tage ohne Wasser und Nahrung auskommen. Sie verlieren dann aber ein Viertel ihres etwa 500 kg schweren Gewichts. Kommt ein ausgedörrtes Kamel an eine Oase, kann es in 10 Minuten 140 Liter Wasser trinken und ist dann wieder topfit.
   Welches Gefäß würde ungefähr 140 Liter Wasser füllen?
   Wie schwer ist etwa ein ausgedörrtes Kamel, das ansonsten 500 kg schwer ist?

7. Recherchiere im Internet oder in Büchern und entwickle selbst interessante Fragestellungen zu Tieren in Afrika, die du selbst löst und dann an der Station für andere Kinder zur Bearbeitung liegen lässt. Schreibe deinen Namen zu der Aufgabe, damit die anderen Kinder dich als Expertin/Experten ansprechen können.

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Lösungshinweise zu Station 1

Zu 1:
Es bietet sich zunächst an, dass sich die Kinder die Flügelspannweite eines Storches mit einem Bandmaß wie auch die Flugstrecke von rund 5 000 km (entspricht z.B. der etwa 100-fachen Strecke zwischen Münster und Dortmund) verdeutlichen.
<u>Berechnung der Flugdauer für einen Hin- oder Rückflug:</u>
200km bis 300km pro Tag → 1 400km bis 2 100 km pro Woche (7 Tage)
→ 2 800km bis 4 200 km in 2 Wochen (14 Tage) → 5 600km bis 8 400 km in 3 Wochen (21 Tage)
Die Störche benötigen also mehr als 2 Wochen, ca. 18 bis 20 Tage für einen Hin- oder Rückflug.
<u>Berechnung der Zeitdauer für eine 5 000 km lange Radfahrt:</u>
Wenn man z.B. von einer Geschwindigkeit von 20km/h ausgeht, könnte ein zehnjähriges sehr sportliches Kind ca. 120km bis 160km an einem Tag per Rad schaffen (mit notwendigen Pausen).
Wenn man diese sportliche Leistung mehrere Wochen täglich durchhalten würde, dann brächte man mindestens 40 Tage (120km x 40 = 4 800km), um 5 000 km zurückzulegen.

Zu 2:
Wenn ein zehnjähriges Kind beim Laufen lange Schritte macht, sind diese je nach Körpergröße 1m bis 1,50m lang. Ggf. könnte dies beispielhaft auf dem Flur probiert werden. Außerdem könnten auch die Weitsprungweiten von Kindern mit der Schrittlänge eines Straußes verglichen werden.
<u>Berechnung der Zeitdauer für einen 20-km-Lauf:</u>
Als Ausgangspunkt könnte die Laufzeit eines Kindes für 1km dienen.
Wenn ein Kind z.B. in 5 min einen Kilometer (bzw. 2 ½ Stadionrunden) laufen kann, würde es für 25km 25 x 5min = 125 min bzw. 2h 5min brauchen. Das ist mehr als 4-mal so lange wie die Zeit, die ein Strauß benötigt (50 km pro h bedeutet 25 km in 30 min).
Nun muss man aber beachten, dass ein Kind im Unterschied zu einem Strauß das Tempo eines 1-km-Laufes unmöglich 2h lang durchhält. Weltklasseläufer bräuchten z.B. etwa 60 min für 20km. Zehnjährige Kinder müssten vermutlich mehrere Pausen einlegen und bräuchten insgesamt ca. 4 bis 6 Stunden. Auch mit einem Fahrrad würden sie mindestens doppelt so viel Zeit wie der laufende Strauß benötigen.

Zu 3:
<u>Berechnung der Zeitdauer für einen 500-m-Sprint eines Gepards:</u>
120 km pro h → 120km pro 60min → 2km pro 1min → 2 000m pro 60 s → 500 m pro 15 s
Der Gepard benötigt also für eine 500m lange Strecke ca. 15 s.
<u>Berechnung der Zeitdauer für einen 500-m-Sprint eines zehnjährigen Kindes:</u>
Wenn ein Kind für 100m ca. 20s benötigt und diese Geschwindigkeit auf einer 500-m-Strecke durchhalten würde, bräuchte es ca. 100 s für diese Strecke.
Da dies nicht möglich ist, sind wohl eher 150 s bzw. 2 ½ min realistisch.
Oder anders ausgedrückt: In einem Wettlauf zwischen einem Gepard und einem sehr sportlichen Kind würde das Kind in 15s 100m und der Gepard das Fünffache (500m) zurücklegen.
Übrigens: Spitzenleichtathleten benötigen für eine 400-m-Strecke ca. 45 s. Sie hätten also gegen einen Gepard auch keine Chance.

Zu 4:
Nein, eine erwachsene Giraffe passt nicht in einen Klassenraum.

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Das menschliche Herz ist etwa faustgroß (6 bis 10 cm lang) und wiegt ungefähr 250 g bis 350 g. Das Herz einer Giraffe ist damit etwa 10-mal so groß und 40-mal so schwer wie das eines Menschen bzw. 10 Jahre alten Kindes.

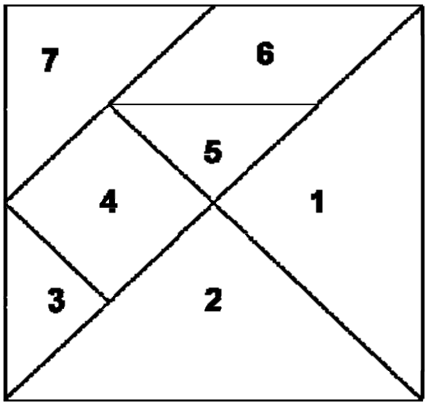
Zu 5:
Die Masse, die ein Mensch an einem Tag isst, hängt natürlich von der Art der Nahrung ab. Eine vielseitige und ausgewogene Tagesnahrung könnte insgesamt etwa 2 kg bis 3 kg schwer sein. Zugleich trinkt ein Mensch pro Tag etwa 2 l bis 3 l. Hiervon ausgehend würde ein 10 Jahre altes Kind etwa 50 bis 70 Tage brauchen, um die tägliche Nahrung eines Elefanten aufzunehmen. Und es würde ca. 25 bis 40 Tage benötigen, um die tägliche Flüssigkeitsmenge eines Elefanten aufzunehmen.

Zu 6:
140 Liter Wasser würden 14 große 10-Liter-Wassereimer oder eine große Badewanne füllen. Wenn man eine vollgefüllte Badewanne mit großen Bechern leeren wollte, bräuchte man sicher viel länger als 10 min. Ein Kamel entwickelt also auch beim Trinken eine enorme Geschwindigkeit. Ein Viertel von 500 kg ist 125 kg – ein ausgedörrtes Kamel ist somit noch ungefähr 375 kg schwer.
Und übrigens:

- Ein Mensch kann max. 2 Tage ohne Flüssigkeitsaufnahme aushalten.
- Kamele verlieren kaum Flüssigkeit, weil sie so gut wie gar nicht schwitzen. Stattdessen steigt ihre Körpertemperatur um bis zu 8^0 C an und fällt am gleichen Tag wieder, ohne dass die Kamele Schäden bekommen.

Nina Berlinger
Ann-Katrin Brüning
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Station 2: Asien - Zur Geschichte des Tangram-Spieles



Das Tangram ist ein altchinesisches Legespiel.
Es besteht aus einem Quadrat, das sich aus 7 Teilen zusammensetzt:

- einem kleinen Quadrat,
- einem Parallelogramm,
- gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken in 3 verschiedenen Größen.

Der chinesische Name „Chi Ch'ae pan" weist auf eine Entstehung des Spiels während der Chu-Zeit hin, also etwa 740-330 v. Ch. Geburt. Der Name deutet auf einen Brauch, nach welchem man am 7. Tag des 7. Monats einen Faden durch eine Nadel mit 7 Öhren steckte. Das sollte Glück bringen. Erst viel später, zur Zeit des Ch'ing-Kaisers Chia Ch'ing (1796-1820), wurden die ersten Tangrambücher gedruckt.

Bei den Chinesen heißt das Tangram auch „***Weisheitsbrett***" oder „***Sieben-Schlau-Brett***". Beide Namen sind zutreffend, denn ohne etwas Überlegung und eine gewisse Intelligenz kann man es nicht spielen. Das „Spielen" mit dem Tangram besteht darin, mit den 7 Teilen Formen nachzulegen oder Phantasieformen zu erfinden und zu legen.

Da das Tangram ein Spiel ist, hat es auch ***Spielregeln***, und zwar:

- Jede Figur muss immer aus allen 7 Teilen gelegt werden, nicht aus mehr und nicht aus weniger – immer aus denselben feststehenden Formen.
- Es dürfen nur Flächen gelegt werden, d.h., dass die Teile nicht übereinander gelegt werden dürfen und die 7 Teile müssen immer eine zusammenhängende Figur ergeben.

Die früheste europäische Veröffentlichung eines Tangrambuchs stammt aus dem Jahre 1805. Der Titel war *„Neues chinesisches Rätselspiel für Kinder in 24 bildlichen und alphabetischen Darstellungen"*.

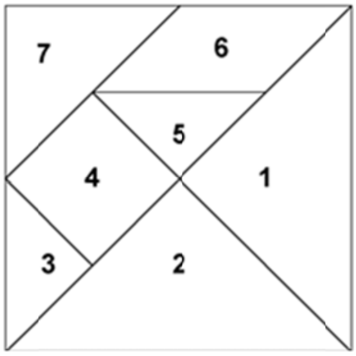
Während das Tangram in China eher die mystische Bedeutung als *„Behausung"* hatte, weil aus den Teilen verschiedene Hausformen gelegt werden können, wurde es in Europa viel freier als reines Legespiel interpretiert. Und es gibt unglaublich viele kreative und interessante Legefiguren aus den 7 Teilen des Tangramspiels.

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

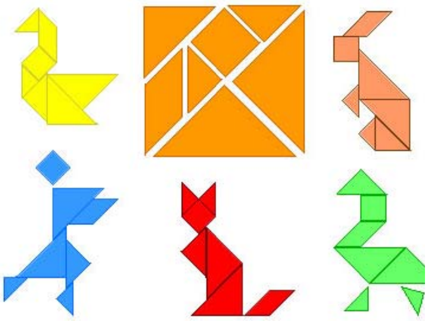
Station 2: Asien – Forscheraufgaben zum Tangram-Spiel

1. Erforsche, ob du mit den 7 Teilen des Tangrams
    - ein Dreieck,
    - ein Rechteck (das kein Quadrat ist),
    - ein Parallelogramm (das kein Rechteck ist),
    - ein Trapez (das kein Parallelogramm ist),

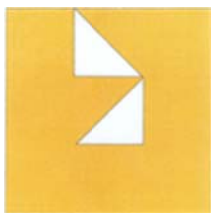
   legen kannst.



2. Mit den 7 Teilen kannst du auch viele Fantasie-Figuren legen, wie zum Beispiel Buchstaben, Ziffern, Tiere, …
   Lege selbst einige Fantasiefiguren und gib ihnen passende Namen.



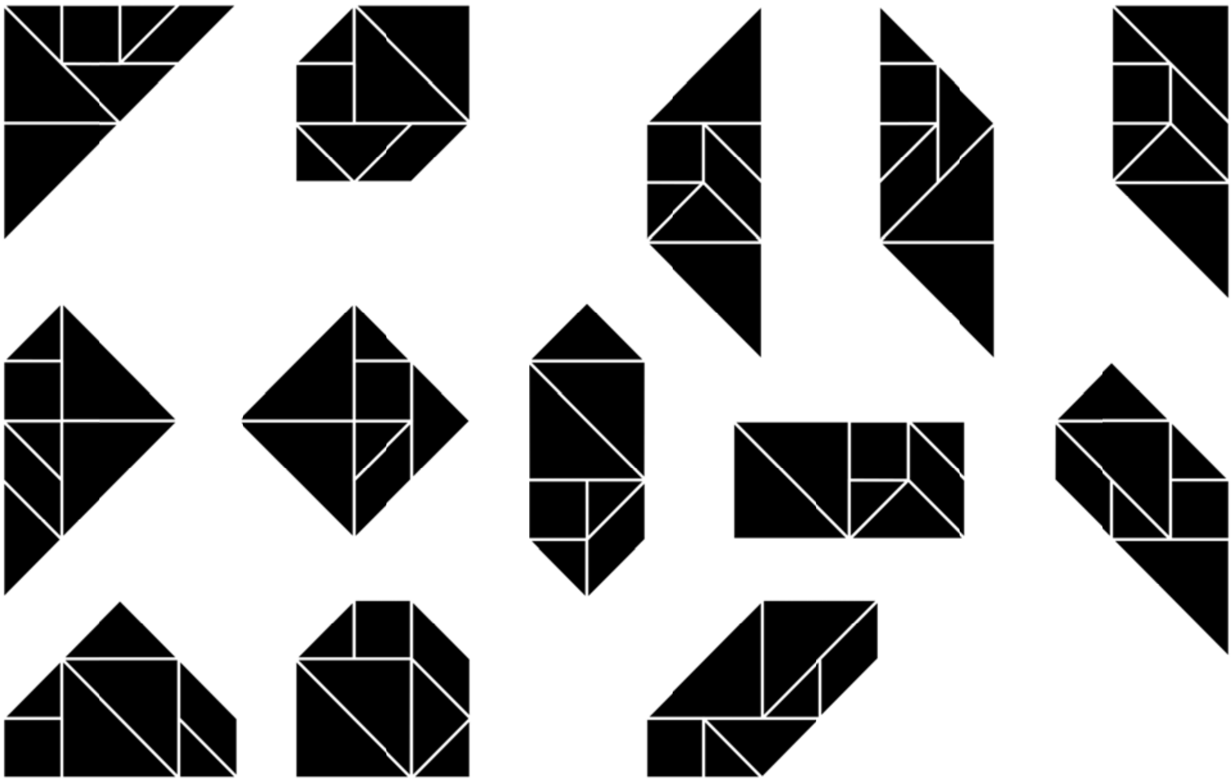
3. Versuche, diese Figuren nachzulegen:



NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Lösungshinweise zu Station 2

Zu 1:
Ja, mit den 7 Teilen des Tangrams kann man alle geforderten ebenen Figuren legen. Es gibt insgesamt sogar 13 verschiedene ebene konvexe n-Ecke:



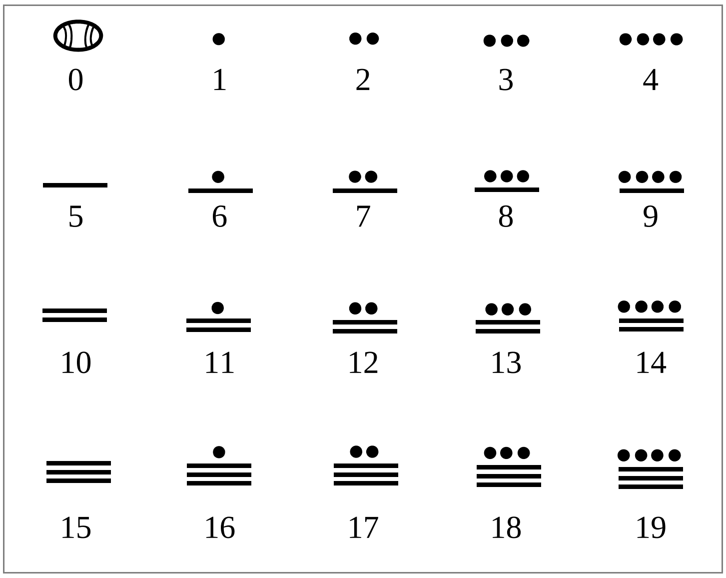
Zu 3:
Die Aufgabenbeispiele stammen aus einem Tangram-Kartenspiel (www.zaubereinmaleins.de).
Es ist möglich, dass die Karten für die Kinder auch als Aufgabenkarten eingesetzt werden.
Auf den Rückseiten der Karten sind die jeweiligen Lösungen angegeben.

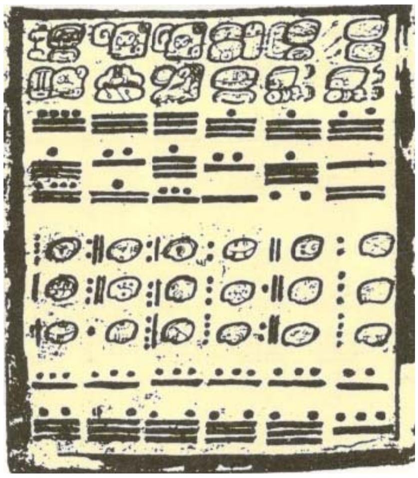
Nina Berlinger
Ann-Katrin Brüning
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Station 3: Mittelamerika – Das Zahlsystem der Mayas

Eine Pyramide der Mayas in Mexiko

Das Maya-Volk lebte vor ungefähr 1500 Jahren im heutigen Mexiko und Guatemala. Sie waren wahre Meister im Rechnen und schufen einen Kalender, der so gut war, dass er erst nach 5000 Jahren um einen Tag falsch gegangen wäre. Um Zeichen für die Zahlen zu finden, schauten sich die Mayas ihre Umgebung genau an.
Mais war das wichtigste Essen der Mayas, daher malten sie ein Maiskorn (Punkt) für die Zahl 1, zwei Maiskörner für die Zahl 2, drei für die Zahl 3 und vier für die Zahl 4. Bei der 5 malten sie jedoch keine fünf Maiskörner, sondern einen Strich. Die Zahl 6 wird dann als ein Strich und ein Maiskorn dargestellt. So konnten die Mayas erst einmal die Zahlen bis 19 darstellen.
Die Mayas waren auch das erste Volk, das einen Begriff für die leere Zahl 0 hatte. Auch dafür schauten sie sich wieder in ihrer Umgebung um und fanden ein leeres Schneckenhaus.

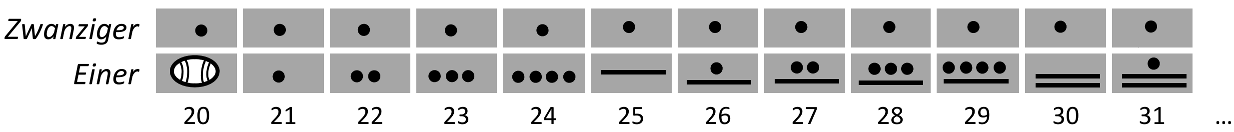


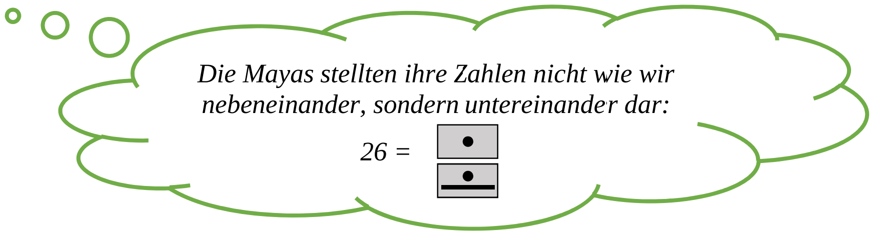


Der Maya-Kodex

Nina Berlinger
Ann-Katrin Brüning
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Für die meisten Rechnungen reichen jedoch die Zahlen von 0 bis 19 nicht aus. Daher nutzten auch die Mayas ein Stellenwertsystem. Dieses war jedoch etwas anders aufgebaut als das, das wir heute kennen. Sie bauten ihre Zahlen zweireihig auf. Das Maiskorn (Punkt) in der oberen Reihe steht für 20. Es wird mit den Symbolen darunter kombiniert, um hohe Zahlen schreiben zu können. Für die Zahl 40 wurden also in der oberen Reihe 2 Maiskörner (Punkte) eingetragen.





Forscheraufgaben zum Zahlsystem der Mayas

1. Schreibe das heutige Datum auf Maya-Art auf.

2. Was ist die größte Zahl, die du anhand dieses Stellenwertsystems darstellen kannst?

3. Wie kannst du das Stellenwertsystem sinnvoll erweitern, um größere Zahlen darstellen zu können?

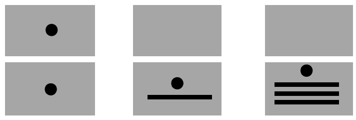
Nina Berlinger
Ann-Katrin Brüning
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Mathe für kleine Asse

Lösungshinweise zu Station 3
Die Station thematisiert das Vigesimalsystem des Mayavolks. Ziel der Station soll das Erkunden eines anderen Zahlsystems sein.
An der Station werden die Kinder zunächst über das Mayavolk und deren Zahlsystem mit Hilfe der Kopiervorlage 1 informiert. Im Anschluss sollen die Aufgaben auf Kopiervorlage 2 bearbeitet werden. Die Lehrkraft gibt ggf. Hilfestellungen und Impulse zu weiterführenden Fragestellungen oder die Kinder entwickeln selbstständig weitere Forscheraufgaben.

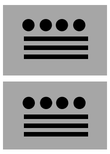
Lösungen:
1. *Schreibe das heutige Datum auf Maya-Art auf.*

Beispiel: 21.6.16



Es muss berücksichtigt werden, dass das Jahr 2016 anhand des vorgestellten Stellenwertsystems noch nicht darstellbar ist. Dazu bedarf es einer weiteren Bündelungseinheit, die folgerichtig die 400er darstellen muss. Dieses Problem führt zu den folgenden Fragestellungen.

2. *Was ist die größte Zahl, die du anhand dieses Stellenwertsystems darstellen kannst?*



$19 \cdot 20 = 380$

$19 \cdot \ \ 1 = \ \ 19$

$= 399$

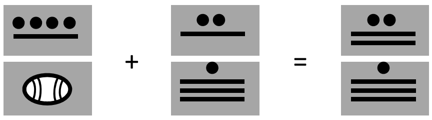
3. *Wie kannst du das Stellenwertsystem sinnvoll erweitern, um größere Zahlen darstellen zu können?*
Die nächstgrößere Bündelungseinheit wäre 400 (20 · 20) und würde als weiteres Kästchen über den anderen dargestellt werden. Darüber hinaus können auch weitere größere Bündelungseinheiten gebildet werden. Als Hilfestellung können Parallelen zum Dezimalsystem gebildet werden.

64 000 000er	20 · 3 200 000	10 000 000er	10 · 10 000 000
3 200 000er	20 · 160 000	1 000 000er	10 · 100 000
160 000er	20 · 8000	100 000er	10 · 10 000
		10 000er	10 · 1000
8000er	20 · 400	1000er	10 · 100
400er	20 · 20	100er	10 · 10
Zwanziger	20	Zehner	10
Einer	1	Einer	1

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Weitere Anschlussprobleme wären das Finden der, je nach Größe des Stellenwertsystems, größten Zahl, die sich darstellen ließe. Es kann außerdem geknobelt werden, wie die Mayas gerechnet, beispielsweise addiert, haben müssen. ! Achtung: Punkte müssen ggf. durch Striche ersetzt werden!

Beispiel für die Addition: 180 + 156 = 230



Literatur:
Banjado Manufaktur: Maya-Kalender Memoboard. Abgerufen von http://www.ebay.de/itm/Memoboard-46-5-x-46-5-cm-Maya-Kalender-Wandtafel-Foto-Motiv-Magnete-Set-rund-/150991936715 [03.06.2016]
Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (2005). Mathematik - Neue Wege 5. Braunschweig: Westermann Schroedel, S. 87-88.
Wikipedia: Maya. Pyramide des Kukulcán. Abgerufen von https://de.wikipedia.org/wiki/Maya [03.06.2016]
Labbé, M.: Das Mayavolk. Abgerufen von http://www.labbe.de/zzzebra/index.asp?themaid=559&titelid=3254 [3.06.2016]

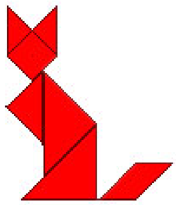
Dein Reisepass für die mathematische Weltreise

Dein Name: ____

Du wirst zu verschiedenen Kontinenten und Ländern reisen.
Dort wirst du verschiedenen Aufgaben begegnen oder selbst welche erfinden.
Bitte schnall dich an, stell deinen Sitz in eine aufrechte Position. Der Kapitän und seine Crew wünschen dir viel Spaß und Freude beim Knobeln an den Stationen!

Erledigte Stationen:

Afrika 

Asien 

Mittelamerika 

Weitere Kontinente und Länder

[1] **Abbildung Flugzeug**: Günstige Reise-Angebote (2016): Charter Flüge. Abgerufen von http://www.reisesaison.de/charter-fluge/ [4.05.2016]

NINA BERLINGER
ANN-KATRIN BRÜNING
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Stationenlernen

Stationenlernen wird häufig zu den klassischen Formen offenen Unterrichts gezählt. Dies bedeutet, dass

- dem aktiv-entdeckenden Lernen eine besondere Bedeutung zukommt,
- die Kinder hinsichtlich der Wahl von Unterrichtsinhalten, Sozialformen, Arbeitsmitteln u.Ä.m. selbstverantwortlich mitentscheiden können,
- die Lehrkraft eher eine moderierende, begleitende und beratende Rolle einnimmt und sich verstärkt dem individuellen Diagnostizieren und Fördern widmen kann (angelehnt an Edel & Popp, 2008).

Im Schulalltag findet man im Mathematikunterricht jedoch oft Formen von Stationenlernen, die den genannten Kriterien nur teilweise entsprechen. So öffnen die Lehrkräfte den Unterricht zwar vielfach in organisatorischer Hinsicht, stellen den Schülerinnen/Schülern aber inhaltlich eher geschlossene Mathematikaufgaben mit wenigen Differenzierungsmöglichkeiten „häppchenweise“ bereit. Bei der Planung von Stationen für das Lernen im Mathematikunterricht sollte daher ein besonderer Fokus auf die innere Differenzierung, auf inhaltlich offene und mathematisch substanzielle Aufgaben und auf eine ausgewogene Mischung von elementarem Üben und mathematisch anspruchsvollem Problemlösen gelegt werden.

Spezielle Vorzüge eines solchen Stationenlernens im Mathematikunterricht bestehen darin, dass

- der Aufbau vernetzter Wissenssysteme bei den Schülerinnen/Schülern gefördert werden kann,
- das individuelle Wechseln von Lernthemen, des Lernorts u.a. den natürlichen Lerngewohnheiten von Kindern entspricht,
- den Kindern unterschiedliche Motivationsreize geboten werden und
- allen Kindern die Möglichkeit gegeben wird, ihren jeweiligen Potenzialen, Interessen und Vorlieben entsprechend zu lernen (vgl. Benölken & Käpnick, 2016, S. 188–190).

Somit können mit dieser Organisationsform im regulären Mathematikunterricht auch mathematisch begabte Kinder in angemessener Weise individuell gefördert werden.

Beim Stationenlernen können in der Regel die folgenden Phasen unterschieden werden (angelehnt an Benölken & Käpnick, 2016, S. 188–189), die sich auch im Praxisbeispiel zur „Mathematischen Weltreise“ wiederfinden:

- ein gemeinsames Gespräch u.a. zu den Zielen und Lernthemen der Stationen sowie zur Organisation und zu Verhaltensregeln beim selbstständigen Arbeiten an den Stationen, ggf. auch ein „Stationenrundgang“, um die Aufgaben und Materialien zu besprechen,
- das Lernen in Einzel-, Partner- oder Kleingruppenarbeit an den unterschiedlichen Stationen, wobei die Anzahl, die Reihenfolge, die Verweildauer und das „inhaltliche Eindringen“ in das mathematische Problem individuell unterschiedlich ist,
- ein gemeinsames Auswertungs- und Reflexionsgespräch, in dem es u.a. um Lernwege, Lernergebnisse inklusive verschiedener Fehler und Strategien, um Sozialverhalten, um persönliche Reflexionen bzgl. selbstgesetzter Ziele und die Würdigung der Leistungen aller Kinder gehen kann. In dieser Phase ist es nicht das Ziel, alle Stationen detailliert inhaltlich zu besprechen.

Die einzelnen Stationen sollten im Groben den Anforderungen an offene Problemfelder entsprechen, also natürlich differenzieren, flexible Lösungswege und -darstellungen erlauben, Anschlussprobleme und eine reichhaltige mathematische Substanz beinhalten sowie das Interesse und die Neugier der Kinder wecken (vgl. Benölken, Berlinger & Käpnick, 2016).

Für die Organisation des „Lernens an Stationen“ werden zwei verschiedene Möglichkeiten unterschieden:

- Die Aufgaben werden mit allen Schülerinnen/Schülern zunächst gemeinsam erläutert, dann wählt jedes Kind selbst aus dem Angebot aus und bearbeitet eigenverantwortlich „seine“ Aufgaben (was ein gemeinsames Lernen in Partner- oder Kleingruppenarbeit nicht ausschließt). Abschließend werden die Lernergebnisse gemeinsam ausgewertet.

- Die Kinder einer Klasse bzw. Gruppe werden entsprechend der Anzahl der Stationen in Gruppen eingeteilt. Die Kinder einer Gruppe bearbeiten dann (selbstorganisierend) gemeinsam die Aufgaben einer Lernstation und wechseln anschließend in vorher vereinbarten Zeitrhythmen von Station zu Station. Um den individuell unterschiedlichen Lernpotenzialen der Schüler/innen gerecht zu werden, könnten leistungsstarken bzw. begabten Schülerinnen/Schülern an jeder Station Zusatzaufgaben oder die Möglichkeit für ein selbstständiges Zusammenstellen und Lösen weiterer Aufgaben angeboten werden (vgl. Käpnick, 2014, S. 141).

In Abhängigkeit von den konkreten Zielen und Lernbedingungen kann jede Lehrkraft „vor Ort“ entscheiden, welche Organisationsmöglichkeiten sie nutzen möchte.
Die erste Möglichkeit kann im Kontext eines individuellen Förderns bzw. differenzierenden Lernens der Kinder und somit auch für die Förderung mathematisch begabter Kinder als die eindeutig geeignetere Gestaltungsform gesehen werden. Um eigenverantwortliches Lernen zu fördern, sollten an den Stationen zudem Möglichkeiten der Selbstkontrolle (z.B. Musterlösungen der Aufgaben oder codierte Lösungshinweise) gegeben sein. Außerdem empfiehlt es sich, dass die Schüler/innen in Lerntagebüchern oder Checklisten ihre Ergebnisse und ihr Lernverhalten reflektieren und festhalten. Die Selbstreflexionen der Schüler/innen stellen neben der Analyse der Schülerlösungen, den Beobachtungen durch die Lehrkraft und den gemeinsamen Auswertungsgesprächen zugleich wichtige „Bausteine“ einer prozessbezogenen Diagnose der individuellen Lernpotenziale und -entwicklungen jeder Schülerin bzw. jedes Schülers dar.

Literatur:

Benölken, R. & Käpnick, F. (2016). Stationenlernen. In F. Käpnick (Hrsg.), Verschieden verschiedene Kinder (S. 188-201). Seelze: Kallmeyer.

Berlinger, N. , Benölken, R. & Käpnick, F. (2016). Offene substanzielle Aufgaben und Aufgabenfelder. In F. Käpnick (Hrsg.), Verschieden verschiedene Kinder (S. 157-172). Seelze: Kallmeyer.

Edel, N. & Popp, M. (2008). Offener Unterricht. In G. Bovet & V. Huwendiek (Hrsg.), Leitfaden Schulpraxis. Pädagogik und Psychologie für den Lehrberuf (S. 110-139). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Begabungsfördernde Leistungsbeurteilungen im Mathematikunterricht

1. Besondere Herausforderungen im Schulalltag

Wenn Lehrkräfte im regulären Mathematikunterricht fachliche Leistungen von Schülerinnen/Schülern beurteilen, orientieren sie sich üblicherweise (und prinzipiell völlig zu Recht) an den in den Lehrplänen festgelegten Anforderungen. In Bezug auf Leistungseinschätzungen von mathematisch begabten bzw. sehr leistungsfähigen Kindern erwachsen hieraus jedoch meist zwei nicht zu unterschätzende Probleme:

1) *Erstens* stimmen die in den Lehrplänen gekennzeichneten Inhalte und Kompetenzen nur zum Teil mit den wesentlichen Merkmalen für besondere mathematische Begabungen überein (s. Anlage 3 bzw. Fuchs, 2006; Sjuts, 2017). So werden in den Lehrplänen einerseits Rechenkompetenzen oder räumliches Vorstellungsvermögen als prägende Inhalte mathematischer Allgemeinbildung ausgewiesen. Aus der Sicht der Charakterisierung mathematischer Begabungen im Schulalter stellen diese Fähigkeiten aber (nur) ein unverzichtbares „Handwerkszeug" dar, eine Art Basis bzw. Grundvoraussetzungen für das Entwickeln besonderer und begabungsrelevanter Kompetenzen im Erkennen, Angeben und Übertragen allgemeiner Strukturen oder im flexiblen Wechseln von Repräsentationsebenen. Andererseits wird eine spezifische mathematische Sensibilität, die u.E. ein wesentliches mathematisches Begabungsmerkmal bildet und die häufig mit dem Erkennen und Empfinden ästhetisch schöner mathematischer Muster, Problemlösungen oder Beweise verbunden ist, im Regelunterricht von Lehrkräften eher selten wahrgenommen und demgemäß kaum gewürdigt.
2) *Zweitens* orientieren sich Lehrkräfte bei Leistungsbeurteilungen meist an mittleren Leistungsniveaus mathematischer Allgemeinbildung und bewerten Leistungen kleiner Matheasse entsprechend oft mit der Note „1". Dies wird aber der besonderen Qualität von kreativen oder substantiellen Leistungen der Asse beim Finden einer Beweisidee, beim Entdecken einer Formel oder beim Erkennen und Zusammenstellen von Systemen nicht gerecht. Dass eine angemessene begabungsfördernde Leistungsbeurteilung für eine Lehrkraft im täglichen Regelunterricht ein sehr hoher Anspruch ist, kann die nachfolgende authentische Unterrichtssituation exemplarisch verdeutlichen (vgl. hierzu auch Käpnick, 2017):

Im Mathematikunterricht einer fünften Jahrgangsklasse üben die Kinder das Dividieren natürlicher Zahlen bis 100 000 000 durch einstellige Zahlen. Paula langweilen die Übungsaufgaben. Sie entzieht sich der Unterforderung, indem sie mit den vorgegebenen Zahlen spielt. Dabei entdeckt sie interessante Zahlbeziehungen. Als sich die Lehrerin dem Mädchen zuwendet, behauptet das kleine Matheass gedankenversunken: *„Ich glaube, dass ich eine neue Formel entdeckt habe: Die Quadratzahlen aller ungeraden Zahlen lassen beim Teilen durch 8 den Rest 1."* Der verblüfften Lehrerin zeigt sie eine hierzu passende Aufgabenfolge (vgl. die nebenstehende nachgestellte Abbildung)

$1^2 = 0 \times 0 + 0 \times 2 + 1$

$3^2 = 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1$

$5^2 = 4 \times 4 + 4 \times 2 + 1$

$7^2 = 6 \times 6 + 6 \times 2 + 1$

$9^2 = 8 \times 8 + 8 \times 2 + 1$

Abb. 1: Beispiel einer authentischen Unterrichtssituation aus dem Regelunterricht[1]

[1] Das Beispiel stammt aus einem Bericht einer mathematisch begabten Fünftklässlerin aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse" an der Universität Münster. Der Name ist aus Datenschutzgründen geändert worden.

2. Grundorientierungen für begabungsfördernde Leistungsbeurteilungen im Mathematikunterricht

Die eingangs beschriebenen Herausforderungen des Schulalltags erfordern von Lehrkräften, bei Leistungsbeurteilungen kleiner Matheasse im Regelunterricht neben den lehrplanorientierten sachlichen Anforderungsnormen auch stets die jeweilige individuelle Bezugsnorm zu berücksichtigen. Dies verlangt wiederum, dass Mathematiklehrkräfte die Spezifik mathematischer Begabungen im Allgemeinen und die individuelle Begabungsausprägung eines Kindes im Konkreten ausreichend kennen. Auf der Basis dieses Wissens besteht eine wichtige Aufgabe einer Fachlehrkraft darin, die individuellen Potenziale wie auch die besonderen Bedarfe jedes Kindes kontinuierlich zu erfassen und zu analysieren. Für die Umsetzung dieser zweifellos sehr anspruchsvollen Aufgabe enthalten die Postertexte „Formatives Assessment“ (Käpnick, 2017) und „Förderorientierte Leistungsrückmeldungen an kleine Matheasse“ praktikable Empfehlungen (Käpnick, 2018).
Erforderlich ist zunächst ein Erfassen der spezifischen Potenziale, der individuellen Begabungsausprägungen und zugleich der besonderen Bedürfnisse eines Kindes. Dies ermöglicht einer Lehrkraft in der Folge, Leistungsbeurteilungen sowohl von schriftlich dokumentierten Lernergebnissen als auch von im täglichen Unterricht erbrachten Leistungen und Verhaltensweisen, wie im beschriebenen Beispiel von Paula, vorzunehmen; und dies stets im Kontext der individuellen gesamten Persönlichkeitsentwicklung einer Schülerin bzw. eines Schülers. „Begabungsfördernd“ bedeutet dabei, stets verständnisvoll und kompetenzorientiert mit einem kleinen Matheass zu kommunizieren. So könnte Paulas Lehrerin als erstes ausdrücklich anerkennen, dass sich das Mädchen eigenständig eine sehr anspruchsvolle und zugleich sehr sinnvolle mathematische Herausforderung stellte und hierfür selbstbestimmt eine hochwertige Lösung entwickelte. Dass es, wie im beschriebenen Unterrichtsbeispiel, nicht jeder Lehrkraft ad hoc möglich ist, die vollständige Korrektheit der Lösungsideen einzuschätzen, stellt für kleine Matheasse im Allgemeinen kein Problem dar und sollte auch eine Lehrkraft nicht verunsichern. Mit dem Hinweis, die Gültigkeit von Paulas interessanten Zahlbeziehungen korrekt zu begründen bzw. zu beweisen (vgl. hierzu Anlage 1), könnte die Lehrkraft vielmehr eine „Brücke der Verbundenheit“ zum Mädchen aufbauen und zugleich Paulas Forscherdrang weiter anstacheln – ganz im Sinne einer begabungsfördernden Leistungsbeurteilung.
Diese Grundorientierung gilt gleichermaßen für alle begabungsfördernden Leistungsbeurteilungen von Lehrkräften im Mathematikunterricht, im Besonderen für solche, die sich auf individuelle Feedbacks von Lehrkräften zu komplexen schriftlichen Lernergebnisdarstellungen, auch verbunden mit Selbstreflexionen von mathematisch begabten oder sehr leistungsstarken Schülerinnen/Schülern, beziehen. Passende Formate hierfür sind vor allem:

- Portfolios,
- Pensenbücher,
- Lernzielkataloge oder
- Beurteilungsraster.

Für den Primarstufenbereich bieten sich für Leistungsbeurteilungen erfahrungsgemäß Entwicklungsgespräche der Lehrkräfte mit kleinen Matheassen auf der Basis von Portfolios an (vgl. Käpnick, 2017). Im Bereich der Sekundarstufe wird häufig mit Erfolg die lernzielorientierte Beurteilung (LOB) genutzt, bei der eine Lehrkraft mit einer Schülerin bzw. einem Schüler individuelle Lernziele für den Mathematikunterricht vereinbart, die über das übliche Anforderungsniveau der Lehrpläne hinausgehen können. Solche individuellen Lernziele könnten beispielsweise das Erforschen von Zahlbeziehungen, wie dies Paula von sich aus tat, umfassen.
Für die Umsetzung verschiedener Differenzierungsformen können interessierten Schülerinnen/Schülern herausfordernde Aufgaben angeboten werden. Anlage 2 enthält Literaturempfehlun-

gen für derartige Aufgabensammlungen. Hauptbeurteilungskriterien für die Leistungen und individuellen Lernziele von Matheassen sollten die mathematikspezifischen Begabungsmerkmale und die auf mathematisch-produktives Tätigsein gerichteten begabungsstützenden Persönlichkeitsmerkmale sein (s. Anlage 3). Wenn es sich anbietet, kann und sollte eine Lehrkraft auch jeweils Querverbindungen zu Kompetenzen mathematischer Allgemeinbildung entsprechend den üblichen Lehrplanfestlegungen herstellen. Hierfür eignen sich vor allem die prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards für das Fach Mathematik, also Kompetenzen im Problemlösen, im Modellieren, im Darstellen von mathematischen Sachverhalten und im Kommunizieren hierüber sowie im mathematischen Argumentieren. Als Beurteilungskategorien können beispielsweise „in hohem Maße erreicht“, „im Wesentlichen erreicht“ oder „nicht erreicht“ verwendet werden (Begabungsfördernde Leistungsbeurteilung, 2016). Für Österreich und Deutschland ist hierbei zu beachten, dass für den Extremfall eines gänzlichen Verzichts auf die übliche Notenskala ein spezieller Schulversuch beantragt werden muss.
Eine wichtige und effektive Orientierungshilfe beim Beurteilen können zudem Beurteilungsraster darstellen. Hierfür sollte die Lehrkraft ein Raster mit möglichst eindeutigen Beurteilungskriterien vorgeben oder noch besser: mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeiten (ebd.). Auf dieser Basis kann z.B. ein differenzierendes Beurteilungssystem zur individuellen Förderung mathematisch begabter bzw. sehr leistungsstarker Schülerinnen und Schüler umgesetzt werden:

- Prägnante Zusammenfassungen der Lerninhalte einer Unterrichtsstunde bzw. einer Lerneinheit (2 Punkte),
- vollständig richtiges Lösen einer anspruchsvollen Zusatzaufgabe (die dem Anforderungsbereich 3 der Bildungsstandards (Verallgemeinern und Reflektieren) entspricht) (2 bis 4 Punkte),
- Kurzvortrag zu einem speziellen mathematischen Thema, das die Inhalte des regulären Mathematikunterrichts vertieft oder ergänzt, wie z.B. Ver- und Entschlüsseln von Botschaften, logische Gesetze oder Biografien berühmter Mathematiker/innen (4 bis 6 Punkte),
- selbstständiges Bestimmen und erfolgreiches Bearbeiten einer Forscheraufgabe (die ebenfalls dem Anforderungsbereich 3 der Bildungsstandards entsprechen sollte) (4 bis 6 Punkte),
- schriftliche Ausarbeitung zu einem frei gewählten mathematischen Thema (die auch dem Anforderungsbereich 3 der Bildungsstandards entspricht) (4 bis 6 Punkte).

Mit einer solchen klaren Vorgabe von Kriterien kann die Beurteilung von Lernprodukten für Schüler/innen transparent werden. Außerdem sollte man den kleinen Matheassen die Möglichkeit einräumen, jeweils selbst über die Herausforderungsform, die mathematischen Inhalte, die Mittel- und Mediennutzung sowie über die Art der Präsentation ihrer Lernergebnisse zu entscheiden. Zudem könnten sie ihre vielfältigen Ergebnisse in einem Portfolio sammeln (vgl. Portfolio). In einer dem Zeugnis beigelegten verbalen Beurteilung könnte eine Lehrperson zusätzlich die besonderen Leistungen eines kleinen Matheasses hervorheben und dadurch ein entwicklungsorientiertes Feedback geben (vgl. ebd. und Käpnick, 2017).
Auf diese Weise erfahren besonders begabte Schüler/innen eine verdiente Würdigung ihrer Leistungen, die häufig über die Notenbeurteilung hinausgeht. Dieses Beurteilungssystem könnte die individuellen Leistungen und Erfolge der Schüler/innen somit adäquat bestätigen – in Bezug auf ihre persönlichen Fortschritte wie auch auf ihre Bemühungen. Letztlich wirken derartige wertschätzende Zuwendungen auf die Schüler/innen im Allgemeinen motivationssteigernd, sowohl während des Unterrichts als auch zum Schuljahresende (ÖZBF, 2017).

Literatur

Fuchs, M. (2006). Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen (Bd. 4 der Reihe Begabungsforschung; hrsg. von Ch. Fischer und F. Mönks). Berlin: LIT.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler (Bd. 1). Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. (2017). Förderorientierte Leistungsrückmeldungen an kleine Matheasse. Salzburg: Wege in der Begabungsförderung in Mathematik. Abrufbar unter: www.oezbf.at/plakat.

Käpnick, F. (2018). Formatives Assessment – ein wertvolles didaktisches Mittel zum Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder. Salzburg: Wege in die Begabungsförderung in Mathematik. Abrufbar unter: www.oezbf.at/plakat.

ÖZBF (2017). Begabungsfördernde Leistungsbeurteilung. In Wege in der Begabungsförderung. Eine Methodensammlung für die Praxis (S. 27-28). Salzburg: ÖZBF.

Sjuts, B. (2017). Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen (Bd. 9 der Reihe „Schriften zur mathematischen Begabungsforschung“, hrsg. von F. Käpnick). Münster: WTM.

Anhang

Anhang 1: Hinweise zum Nachweis der Allgemeingültigkeit von Paulas entdeckten Zahlbeziehungen

Anhang 2: Literaturempfehlungen zu geeigneten Aufgabensammlungen für individuelle Förderpläne kleiner Matheasse

Anhang 3: Modelle zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter (von Fuchs & Käpnick) und im 5. und 6. Schuljahr (von Sjuts)

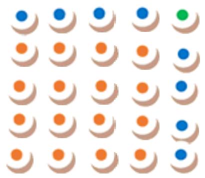
Anlage 1

Hinweise zum Nachweis der Allgemeingültigkeit von Paulas entdeckten Zahlbeziehungen

Für kleine Matheasse, die mit formalem Umformen von Gleichungen mit Variablen noch nicht vertraut sind, für die also Paulas Zahlbeziehung in allgemeiner Form ($(2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$, wobei a eine beliebige natürliche Zahl sei) zu abstrakt ist, bietet sich ein anschaulich-geometrischer bzw. beispielgebundener Beweis an:

Anschaulicher bzw. beispielgebundener Beweis:

Die ersten beiden konkreten Zahlbeziehungen können geometrisch-anschaulich durch folgende entsprechende „Übersetzung" dargestellt werden:



$3^2 = 2^2 + 2x2 + \mathbf{1}$ $\quad\quad$ $5^2 = 4^2 + 2x4 + \mathbf{1}$

$3^2 = 4x1^2 + 2x2 + \mathbf{1}$ $\quad\quad$ $5^2 = 4x2^2 + 2x4 + \mathbf{1}$

Die Rechenstruktur verdeutlicht jeweils die Anwendung der 1. Binomischen Formel und zeigt die gewünschten bzw. geforderten Eigenschaften:

- Die gesamte Quadratanordnung entspricht jeweils dem Quadrat einer ungeraden Zahl.
- Die Menge der roten Plättchen ist der erste Summand der rechten Seite der 1. Binomischen Formel und entspricht jeweils dem allgemeinen Term $4a^2$.
- Die Menge der blauen Plättchen ist der 2. Summand der rechten Seite der 1. Binomischen Formel und entspricht jeweils dem Term 4a bzw. 2a x 1.
- Das grüne Plättchen entspricht jeweils dem Rest 1.

Der „Philosophie" des beispielgebundenen Begründens zufolge sieht man in den Einzelfällen die allgemeine Struktur bzw. Beweisidee und ist überzeugt davon, dass diese Struktur aufgrund der analogen Darstellung für jeden Fall gilt (denn es ist egal, ob es eine 3x3-, 5x5-, 7x7-, ... Anordnung von Plättchen ist.

Die anschaulich-geometrische Darstellung animiert, wie bei Paula geschehen, zu einer „schönen" Gleichungskette (im Sinne des Mathematiktreibens):

$1^2 = 0x0 + 0x2 + 1$

$3^2 = 2x2 + 2x2 + 1$

$5^2 = 4x4 + 4x2 + 1$

$7^2 = 6x6 + 6x2 + 1$

...

Arithmetisch-abstrakter Beweis:

Für Schüler/innen, die bereits Gleichungen mit Variablen äquivalent umformen können, wäre auch ein arithmetisch-abstrakter Beweis möglich, dem folgende Gedankengänge zugrunde liegen:

- Für eine beliebige ungerade Zahl kann der Term „2a + 1" (a – beliebige natürliche Zahl) verwendet werden.

$\rightarrow (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$ (Quadrieren, Anwenden der 1. Binom. Formel)

$\quad\quad = 4 (a^2 + a) + 1$ (Ausklammern)

→ Das bedeutet: Der 1. Summand „4 (a^2 + a)" ist auf jeden Fall durch 4 teilbar, weil ein Faktor des Terms 4 ist. Der 2. Summand des Ausdrucks „4 (a^2 + a) + 1" ist der beschriebene Rest 1.
Es gilt nun also noch nachzuweisen, dass der 1. Summand „4 (a^2 + a)" nicht nur durch 4, sondern durch 8 (= 2 x 4) teilbar ist.
Hier kann man 2 Fälle unterscheiden:

1. Fall: a ist eine gerade Zahl.
Dann ist auch a^2 stets eine gerade Zahl und damit auch stets (a^2 + a), weil das Produkt bzw. die Summe von 2 geraden Zahlen stets eine gerade Zahl ist.
Hieraus folgt, dass „4 (a^2 + a)" durch 8 teilbar ist und somit die Behauptung gilt.

2. Fall: a ist eine ungerade Zahl.
Dann ist auch a^2 stets eine ungerade Zahl und damit stets (a^2 + a) eine gerade Zahl, weil das Produkt von 2 ungeraden Zahlen stets eine ungerade Zahl und die Summe von 2 ungeraden Zahlen immer eine gerade Zahl ist.

Aus beiden Fallbetrachtungen (und andere Fälle gibt es nicht) folgt somit, dass „4 (a^2 + a)" durch 8 teilbar ist und Paulas Behauptung allgemeingültig ist.

Anlage 2

Literaturempfehlungen zu geeigneten Aufgabensammlungen für individuelle Förderpläne kleiner Matheasse

Klassenstufen 1 bis 4

Dahl, K. & Lepp, M. (2000). Wollen wir Mathe spielen? Witzige Spiele und knifflige Rätsel. Hamburg: Oetinger.

Dahl, K. & Nordqvist, S. (2000). Zahlen, Spiralen und magische Quadrate (Mathe für jeden). Hamburg: Oetinger.

Enzensberger, H. M. (1997). Der Zahlenteufel. München, Wien: Hanser.

Fulton, J. & Bremner, J. (1998). Denksport – Aufgaben für kluge Köpfe (Zahlen-, Bilder- und Wörterrätsel). Wien: Tosa Verlag.

Gnirk, H., Homann, G. & Lubeseder, M. (1970). Strategiespiele für die Grundschule. Hannover: Schroedel.

Hemme, H. & Schwoerer, M. (1998). Mathematischer Denkspaß. Augsburg: Weltbild Verl.

Hund, W. (1999). Zauberhafte Mathematik. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2001, 2008). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler; Bd. 1 u. 2). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. & Fuchs, M. (2004). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Erst- und Zweitklässler). Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.

Lehmann, J. (1993). 2 mal 3 plus Spaß dabei (2. Aufl.). Berlin: Aulis.

Senftleben, H.-G. (1999). Unterhaltsame Knobeleien. Niederhausen: Falken.

Klassenstufen 5 bis 10

Adam, B. (1998). 350 harte Nüsse für schlaue Köpfe. Augsburg: Weltbild.

Aman, F. (1991). 111 Aufgaben zur Begabtenförderung (Bd. I). Stuttgart: Klett.

Blay, E. (1989). Kleine Denkspielereien für helle Köpfe (4. Aufl.). München: Heyne.

Braun, K. F. (2000). Geheimnisse der Zahl. Wunder der Rechenkunst. Reinbek: Rowohlt.

Brey, L. (1989). Denksportaufgaben. - Regensburg: Wolf.

Drösser, C. (2009). Der Mathematikverführer (9. Aufl.). Reinbek: Rowohlt.

Fritzlar, T., Rodeck, K. & Käpnick, F. (2006). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler). Berlin: Cornelsen.

Lietzmann, W. (1982). Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formeln (11. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Müller-Fonfara, R. (1993). Mathematische Denkspiele. Düsseldorf: ECON.

Noack, M., Unger, A., Geretschläger, R. & Stocker, H. (2011). Mathe mit dem Känguru 3: Die schönsten Aufgaben. München: Hauser.

Rechberger, K. (1991). Vergnügliche Denk- und Knobelspiele. Niedernhausen: Falken.

Stewart, I. (1998). Die Zahlen der Natur. Mathematik als Fenster zur Welt. Berlin: Spektrum.

Stewart, I. (2011). Professor Stewarts Mathematisches Sammelsurium. Reinbek: Rowohlt.

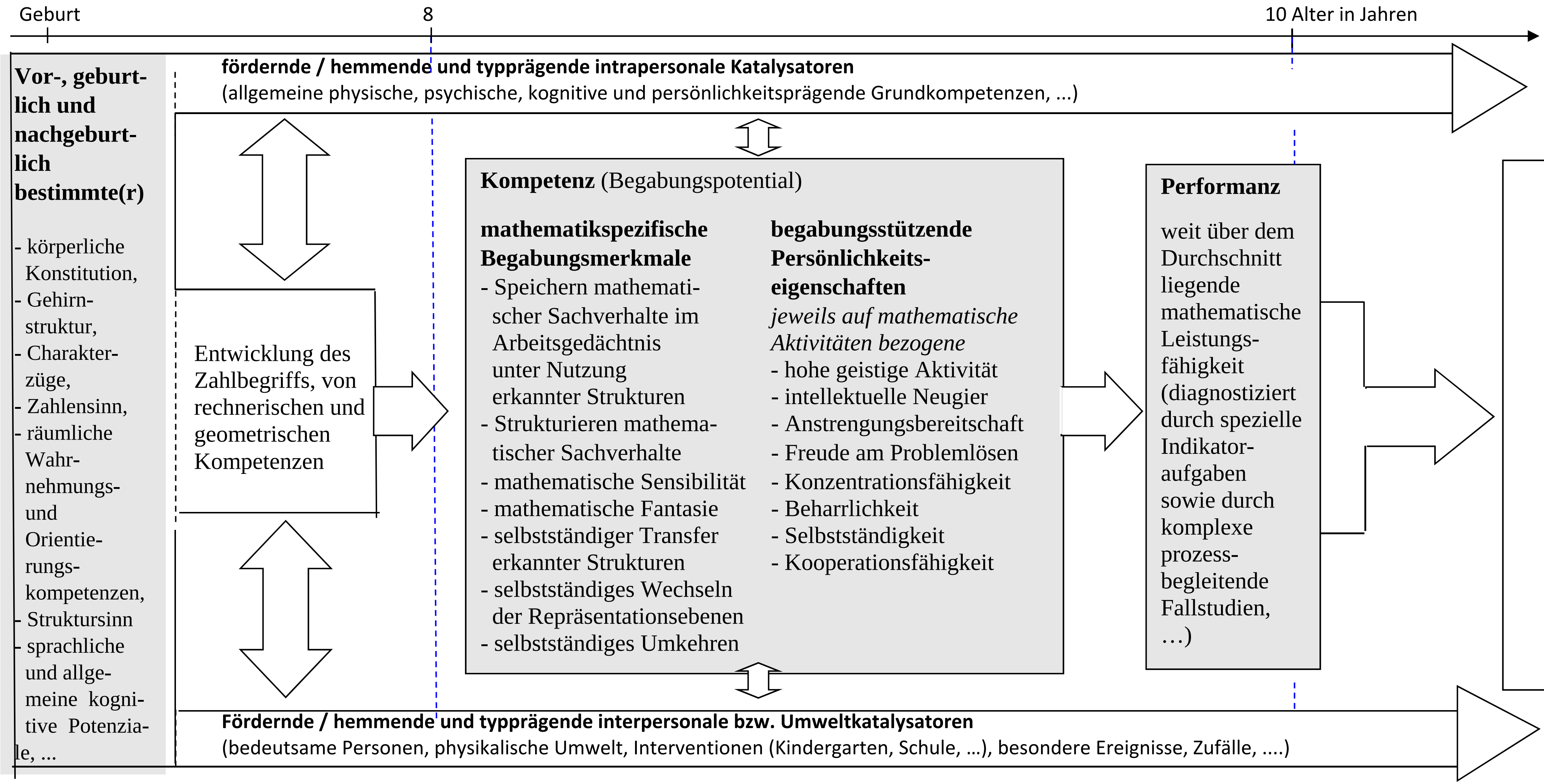
Stiefenhofer, M. (1999). Knobelkiste. 400 harte Nüsse für schlaue Köpfe. Augsburg: Weltbild.

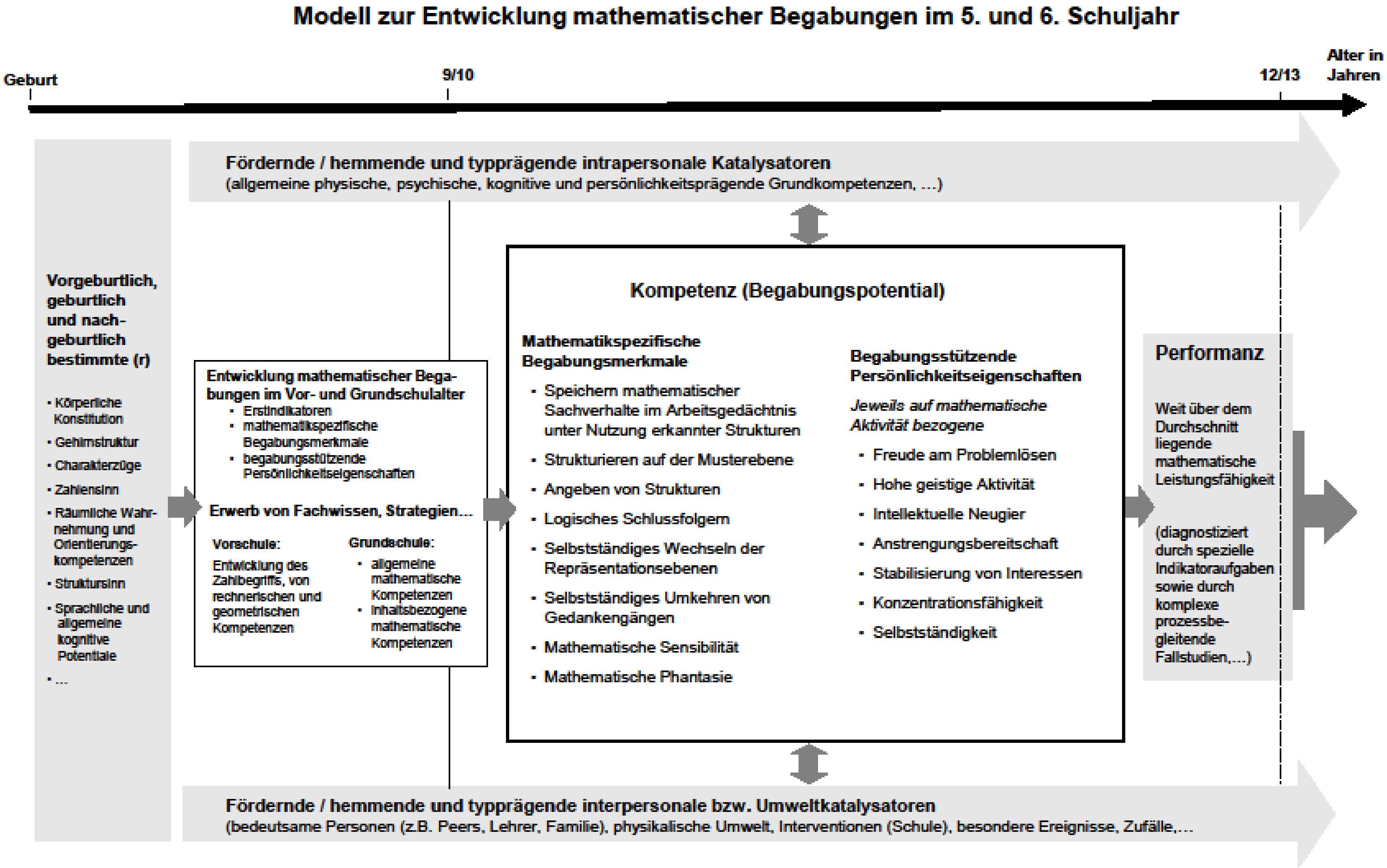
Vohland, U. (2001). Denkspaß Zahlenspiele für 10-16 Jährige. Mainz: Mathias-Grünewald.

Zehl, R. (1984). Denken mit Spaß (Über 200 Kopfnüsse für intelligente Tüftler). Wien: ORAC.

Anlage 3

Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter (von Fuchs & Käpnick)




Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen im 5. und 6. Schuljahr
Geburt
9/10
12/13
Alter in Jahren
Fördernde / hemmende und typprägende intrapersonale Katalysatoren
(allgemeine physische, psychische, kognitive und persönlichkeitsprägende Grundkompetenzen, …)
Vorgeburtlich, geburtlich und nach-geburtlich bestimmte (r)
• Körperliche Konstitution
• Gehirnstruktur
• Charakterzüge
• Zahlensinn
• Räumliche Wahrnehmung und Orientierungskompetenzen
• Struktursinn
• Sprachliche und allgemeine kognitive Potentiale
• …
Entwicklung mathematischer Begabungen im Vor- und Grundschulalter
• Erstindikatoren
• mathematikspezifische Begabungsmerkmale
• begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften
Erwerb von Fachwissen, Strategien…
Vorschule:
Entwicklung des Zahlbegriffs, von rechnerischen und geometrischen Kompetenzen
Grundschule:
• allgemeine mathematische Kompetenzen
• inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
Kompetenz (Begabungspotential)
Mathematikspezifische Begabungsmerkmale
• Speichern mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter Strukturen
• Strukturieren auf der Musterebene
• Angeben von Strukturen
• Logisches Schlussfolgern
• Selbstständiges Wechseln der Repräsentationsebenen
• Selbstständiges Umkehren von Gedankengängen
• Mathematische Sensibilität
• Mathematische Phantasie
Begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften
Jeweils auf mathematische Aktivität bezogene
• Freude am Problemlösen
• Hohe geistige Aktivität
• Intellektuelle Neugier
• Anstrengungsbereitschaft
• Stabilisierung von Interessen
• Konzentrationsfähigkeit
• Selbstständigkeit
Performanz
Weit über dem Durchschnitt liegende mathematische Leistungsfähigkeit
(diagnostiziert durch spezielle Indikatoraufgaben sowie durch komplexe prozessbegleitende Fallstudien,…)
Fördernde / hemmende und typprägende interpersonale bzw. Umweltkatalysatoren
(bedeutsame Personen (z.B. Peers, Lehrer, Familie), physikalische Umwelt, Interventionen (Schule), besondere Ereignisse, Zufälle,…

Formatives Assessment – ein wertvolles didaktisches Mittel zum Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder

1. Grundintentionen des formativen Assessments

Mathematisch sehr leistungsstarke bzw. begabte Kinder verhalten sich im regulären Unterricht häufig anders als die Mehrheit der Mitschüler/innen. So langweilen sie sich z.B. meist beim Einüben von einfachen Rechen- oder Konstruktionsvorschriften. Viele kleine Matheasse fühlen sich in diesen Lernphasen unterfordert, zeigen dann ein demonstratives Desinteresse oder verweigern sogar solche Routinetätigkeiten (z.B. Käpnick, 1999; Sjuts, 2017). Beim Bearbeiten anspruchsvoller Problemaufgaben blühen sie dagegen oft auf, entwickeln zugleich unerwartete, aber vielfach kreativ-substanzielle Lösungsideen oder genießen still und zurückgezogen eine für sie „passgerechte kognitive Spielwiese“, in die sie sich mitunter immer weiter vertiefen. Derartige Verhaltens- und Denkweisen mathematisch begabter Kinder bleiben vielen Lehrkräften nicht selten verborgen. Die betroffenen Kinder sind jedoch vielfach damit überfordert, in angemessener Weise über ihr eigenes Lernen zu reflektieren und es „selbstfördernd“ zu gestalten. Ein entscheidender „Schlüssel“ für Lehrkräfte, um diese gewiss anspruchsvollen Herausforderungen des Schulalltags meistern zu können, stellt das formative Assessment dar.

Basierend auf einer respektvollen Haltung gegenüber jeder Schülerin/jedem Schüler zielt das *formative Assessment* auf kontinuierliche verbale Rückmeldungen von Lehrkräften zu den jeweiligen Lerntätigkeiten von Schülerinnen/Schülern ab. Der besondere Fokus liegt dabei auf einem differenzierten prozessorientierten Erfassen und Einschätzen von individuellen Lernbedürfnissen, Ausgangsniveaus und Fortschritten einer Schülerin/eines Schülers, um sie bzw. ihn in den jeweiligen Lernsituationen bestmöglich zu unterstützen – auch in der Befähigung zu einer angestrebten Eigenverantwortung für ihr/sein Lernen. Das formative Assessment bezieht sich auf den gesamten Prozess des Vertrautmachens, Erforschens, Übens, Anwendens usw. von Lerninhalten. Demgegenüber ist das *summative Assessment* auf eine Qualitätskontrolle in Form von Leistungserhebungen durch benotete Klassenarbeiten, Tests u. Ä. m. am Abschluss der unterrichtlichen Behandlung eines Stoffkomplexes gerichtet (vgl. ÖZBF, 2016, S. 29). Letzten Endes zielt formatives Assessment somit auch auf eine Qualitätssicherung ab und es bietet Lehrkräften zudem permanent Möglichkeiten für eine generelle Unterrichtevaluation wie auch für das bereits angesprochene Erfassen und Unterstützen individueller Lernentwicklungen einzelner Schüler/innen.

2. Didaktisch-methodische Empfehlungen für die Nutzung des formativen Assessments

Aus fachlicher und didaktischer Sicht sollte sich das formative Assessment von Lehrkräften für mathematisch sehr leistungsstarke bzw. begabte Schüler/innen vor allem auf folgende inhaltliche Schwerpunkte fokussieren:

- auf die Entwicklung von positiven Motivationen, Einstellungen und Selbstkonzepten der Schüler/innen auf der Basis einer wertschätzenden Haltung der Lehrkräfte gegenüber den Schülerinnen/Schülern,
- auf das Selbsterkennen und zunehmend bewusste Nutzen von individuell bevorzugten (adaptiven) Denk- und Arbeitsweisen, Lösungsstrategien bzw. Problemlösestilen durch die kleinen „Matheasse“,
- auf die Herausbildung und Verfestigung von inhaltlich korrekten und immer komplexeren Vorstellungen und Verständnissen der Schüler/innen zu grundlegenden Begriffen, Zusammenhängen sowie Phänomenen der Mathematik (zu „intuitiven Theoriekonstrukten“ von Kindern) (Käpnick, 2016).

Um Entwicklungen von *Motivationen, Einstellungen und Selbstkonzepten der Schüler/innen* erfassen zu können, bieten sich zum einen Beobachtungen, ggf. ergänzt mit gezieltem Nachfragen, an. Eine solche Beobachtung kann sich im Unterrichtsalltag spontan ergeben oder auch gezielt geplant werden. Wichtig ist, dass die Lehrkraft nach der Unterrichtsstunde hierüber reflektiert und wichtige Ergebnisse schriftlich festhält. Aus vielen solchen „Puzzleteilen“ einer prozessorientierten Diagnostik ergibt sich in der Regel ein „stimmiges Gesamtbild“ zu den genannten Verhaltensdispositionen. Zum anderen können in bestimmten zeitlichen Abständen, z.B. zweimal während eines Schuljahres, schriftliche Selbstreflexionen der Schüler/innen durchgeführt werden. Beispielsweise könnten kleine Matheasse einen Text schreiben, in dem sie ein für sie besonderes Lernerlebnis beschreiben und dabei herausstellen, inwiefern dieses Erlebnis ihre Motivation, ihre Interessen, Einstellungen oder Haltungen nachhaltig prägte oder veränderte. Diesbezüglich zeigen Längsschnittstudien zu mathematisch begabten Schülerinnen/Schülern auf, dass es für sie sehr häufig „Schlüsselerlebnisse“ gab. In jenen erkennen sie erstmalig oft bewusst ihr eigenes besonderes Begabungspotenzial, was häufig in einer Begeisterung für mathematisch-produktives Tätigsein oder für den besonderen spielerischen wie auch ästhetischen Charakter der Mathematik resultiert (s. nebenstehendes Beispiel).

Selbstreflexion des neunjährigen Alexander aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse“ über ein „Schlüsselerlebnis“:
„Für mich war es ein gewaltiges Erlebnis, als ich allein die Summenzauberformel von Gauß entdeckte. Ich kam darauf, als ich mich im Unterricht eigentlich langweilte und dann mit den Zahlen so vor mich hin spielte. Ich schrieb sie einfach zuerst der Reihe nach auf und dann durcheinander und dann die erste und die letzte Zahl als Paar, die zweite und die vorletzte als Paar und erkannte dabei, dass das immer das Gleiche ergab. Das fand ich cool und zeigte es dann meiner Mathematiklehrerin. Sie sagte mir dann, dass das eine Formel des berühmten Mathematikers Karl-Friedrich Gauß war, die jener als Achtjähriger entdeckt haben soll. Das machte mich ziemlich stolz und ich dachte: Mathe könnte auch mein Ding sein!“

Für das Erfassen von Motivationen, Einstellungen, Haltungen und Selbstkonzepten der Schüler/innen bieten sich außerdem kleine *Leitfadeninterviews* an, mit z.B. Fragen zum eigenen „Bild von Mathematik“, zur subjektiv empfundenen Bedeutung des Mathematikunterrichts oder zu Lieblingsaufgaben (vgl. Anhang). Die nachfolgenden authentischen Auszüge aus Leitfadeninterviews mit Kindern aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse“ können exemplarisch solche Auffassungen, Einstellungen, Selbstkonzepte, aber auch verfestigte Denk- und Arbeitsstile von Kindern aufzeigen:

Leitfrage: Was ist für dich Mathematik?

Gustav (10 Jahre, 4. Schuljahr):
„Mathematik ist für mich, dass ich einfach Spaß habe! Aber es gibt ja auch solche Rätsel wie Sudoku oder Kakuro, da muss man auch gucken, welche Zahl passt wohin. Also für mich bedeutet das einfach nur Spaß. Wenn wir in Mathe Hausaufgaben aufkriegen, heißt das für mich nicht lästige Pflichtarbeit, sondern ist einfach Spaß für mich.“

Tom (15 Jahre, 9. Schuljahr):
„Mathematik ist ein ziemlich großer Teil meines Lebens geworden. Ich bin immer sehr gern zur Mathe-Uni gegangen, habe Mathe-Wettbewerbe mitgemacht und für mich ist es auch wichtig, wenn ich anderen in Mathe helfen kann. Aber für mich hat die Mathematik auch etwas Faszinierendes, wie die Unendlichkeit, die es im normalen Leben nicht gibt.“

Leitfrage: Wie löst du mathematische Probleme, auf die gleiche Art wie im Grundschulalter oder hast du deine Vorgehensweise inzwischen verändert?

Max (12 Jahre, 6. Schuljahr):
„Also früher bin ich einfach so vorgegangen, ich hab' einfach alles ausprobiert. Heute suche ich danach, ob etwas gleich ist oder ob sich etwas wiederholt. Das interessiert mich dann immer, also danach suche ich meistens immer. Früher hab' ich immer einfach drauflos probiert."

Finn (12 Jahre, 6. Schuljahr):
„Mh, eigentlich habe ich meine Vorgehensweise nicht geändert. Also ich versuche das immer so rauszukriegen, das heißt nicht zu probieren. Also … Systeme zu finden – ja, genau, ein System anzuwenden! Und so richtig zufrieden bin ich, wenn die Lösung perfekt ist."

Leitfrage: Was glaubst du, woran liegt es, dass du schwierige mathematische Probleme lösen kannst?

Max (12 Jahre, 6. Schuljahr):
„Also, ich weiß das nicht. Ich hab' das schon im Kindergarten gerne gemacht. Ich hab' mir das halt selbst beigebracht, also größtenteils, wie das Lesen im Kindergarten. Das hab' ich mir halt auch selbst beigebracht. Und so hab' ich auch die erste Klasse übersprungen. Na ja und ich glaube auch, dass der Anfang ziemlich wichtig ist, weil, wenn sich einer in der fünften Klasse dafür interessiert, dann hätte der schlechtere Chancen als einer, der sich schon in der zweiten Klasse dafür interessiert."

Tom (15 Jahre, 9. Schuljahr):
„Weil ich schon von klein auf solche Probleme bekommen habe und ich habe im Projekt viel gelernt, wie man solche Aufgaben lösen kann. Und als ich mathematische Wettbewerbe gewann, merkte ich ebenso, dass mir das einfach liegt. Auch als andere im Matheprojekt zu mir sagten, dass ich eine Superidee für eine Aufgabe fand, half mir das sehr."

Wichtig ist in solchen Gesprächen, den Kindern stets wertschätzend zu begegnen und sie in ihren individuellen Begabungsausprägungen zu stärken. Aus den Gesprächsinhalten ergeben sich zudem oft konkrete Anregungen für eine adaptive Förderung. So könnte der fünfzehnjährige Tom ermutigt werden, verschiedene Erklärungsansätze und Anwendungsbeispiele für „unendlich" zu erforschen und hierzu einen Kurzvortrag für den regulären Mathematikunterricht vorzubereiten.

Vertraulich geführte Interviews oder Lerntagebücher bieten sich ebenso an, um individuell geprägte Sinnkonstruktionen kleiner Matheasse zu grundlegenden Begriffen, Zusammenhängen sowie Phänomenen der Mathematik erfassen zu können. Hierbei ist zu beachten, dass mathematisch interessierte und begabte Kinder häufig sehr intensiv über ihre „Welt der Mathematik" nachdenken und dabei gleichsam erstaunliche wie auch äußerst reflektierte Ideen entwickeln. Dies können folgende authentische Beispiele belegen, die wiederum aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse" stammen:

1. Luca (10 Jahre, 4. Schuljahr) gab als seine Definition des Begriffs „Gerade" an:
   „Eine Gerade ist ein gerader Kreis."

Abb. 1: Lucas Veranschaulichung zu den Begriffen „Kreis" und „Gerade"

Obwohl Lukas intuitive Begriffskonstruktion aus fachlicher Perspektive in mehrfacher Hinsicht „fehlerhaft" ist (Kreis als Oberbegriff für Gerade; diffuses „Vermischen" von einer ebenen und einer linearen Figur; „Zirkelfehler", weil Luka den Begriff „Gerade" mit „gerade" erklärt), so ist in seiner Erklärung ein sinnvoller Kerngedanke erkennbar: Eine Kreislinie (als lineare Figur) hat wie eine Gerade keinen Anfangs- und keinen Endpunkt. Offensichtlich ist der Junge hauptsächlich auf dieses Merkmal fokussiert, das in einem engen Zusammenhang mit dem für viele Kinder faszinierenden Begriff „unendlich" steht. (Käpnick, 2016, S. 117)

2. Beim Philosophieren mit vier mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern wurde den Kindern die Frage gestellt, woher die Zahlen stammen und ob sie jemand erfunden hätte.

   Hierauf entwickelte sich unter den Kindern folgender Gedankenaustausch:
   Weng: *„Als die Welt erschaffen wurde, waren die Zahlen schon da. "*
   Patrick: *„Die Zahlen hat Gott erfunden, das Rechnen die Menschen und die Lehrer leben, um den Kindern das Rechnen zu übertragen."*
   Luca: *„Ich glaube, dass sich der erste Mensch die Zahlen selbst ausgedacht hat."*
   Tim: *„Aber irgendwann haben andere Menschen dann die Minuszahlen erfunden."*

Erstaunlich und zugleich sehr bemerkenswert ist, dass die spontanen intuitiven Vorstellungen der Kinder prinzipiell mit denen großer Philosophen und Mathematiker übereinstimmen, die sehr intensiv über diese Frage nachgedacht und ähnlich kontrastierende Antworten gefunden haben. So kam der berühmte griechische Philosoph Platon (427−347 v.Ch.) zur Auffassung: *„Zahlen sind im Reich der Ideen und dem Menschen vorgegeben."* Der deutsche Mathematiker Kronecker (1823−1891) nahm dagegen wie Patrick an: *„Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott geschaffen; alles andere ist Menschenwerk."* Wie der zehnjährige Luca vertrat der deutsche Mathematiker Dedekind (1831−1916) die Auffassung: *„Zahlen sind freie Schöpfungen unseres Geistes."*

3. Demgegenüber konnten die Kinder aus dem Förderprojekt zum Begriff „unendlich" nur eine „naive" intuitive Begriffskonstruktion entwickeln. Auf die Impulsfrage, ob es eine größte Zahl gibt, „philosophierten" die kleinen Matheasse:

Weng: *„Nein, es gibt unendlich viele Zahlen."*

Leiter: *„Was verstehst du denn unter unendlich?"*
Weng: *„Un heißt nicht – es gibt kein Ende. Die Zahlen gehen immer so weiter."*
Luca: *„Unendlich ist eigentlich keine richtige Zahl. Es ist nur so, dass nach einer Zahl immer noch eine neue kommt."*
Tim: *„Eigentlich haben die Zahlen aber auch keinen Anfang. Es gibt nämlich auch minus unendlich."*
Janik: *„Richtig! Es geht unter 0 immer weiter. 0 ist die Abgrenzung zwischen plus und minus."*
Leon: *„Ja, 0 ist der Gleichstand zwischen den Zahlen."*
Paul: *„Was ist eigentlich unendlich plus 1?*
Luca: *„Das ist nur, dass es immer so weiter gehen kann."*

Der Transkriptausschnitt verdeutlicht, dass die Grundschulkinder einerseits offenbar von „unendlich" fasziniert sind, sich auch schon verschiedene Gedanken zum „Anfang" und „(Nicht-)Ende" des Zählens bzw. der Zahlen gemacht haben und hierbei bemerkenswerterweise – wie Seife (2002) – die Zahl „0" als „Zwilling der Unendlichkeit" erkannten. Andererseits verharren sie auf dem „naiven" intuitiven Verständnis von „unendlich" in dem Sinn, dass *„nach einer Zahl immer noch eine neue kommt"*. Alle mit diversen didaktischen Kniffen ausgeklügelten Versuche unsererseits den Kindern in der nächsten Förderstunde die in der Fachliteratur einschlägig bekannten Erklärungen für „unendlich"[1] nahe zu bringen, scheiterten kläglich. Die kleinen Matheasse konnten offensichtlich keine gedankliche Brücke zwischen ihrem intuitiven Begriffsverständnis und den Erklärungsmodellen der Mathematiker bauen.

Hinsichtlich derartiger intuitiver mathematischer Theorien von Kindern, die sie in vielen Unterrichtsstunden mal weniger deutlich, mal klarer äußern, wurde in Studien (Käpnick, 2016) festgestellt:

- Viele Intuitionen zu naturwissenschaftlichen und mathematischen Themen von Kindern und Erwachsenen sind durchaus ähnlich.
- Bereits Vorschulkinder sind fähig zum kausalen Denken. Es fehlt ihnen aber häufig bereichsspezifisches Wissen für korrekte Erklärungen.
- Veränderungen im Verständnis der Kausalität von der Kindheit bis zum Erwachsenenalter sind weniger gravierend als z.B. von Piaget (Piaget, 2000) angenommen. Nach den bisherigen empirischen Befunden verändern Kinder ihre natürlich entwickelten Systeme von Überzeugungen nicht punktuell durch einzelne Korrekturen. Stattdessen verwenden sie einen Interpretationsrahmen, den sie auf neue Informationen anwenden. Die Veränderung dieses Rahmens ist ein langwieriger Prozess, der oft mehrere Jahre dauert. Dies erklärt auch, warum die kleinen Matheasse z.B. nicht bereit und nicht fähig waren, qualitativ andersartige Definitionen für „unendlich" zu verstehen bzw. für sich zu akzeptieren.

Nach Sodian (2002) findet eine Veränderung einer intuitiven Theorie erst statt, wenn Kinder im Verlauf der Entwicklung die inhaltliche Bedeutung zentraler Begriffe verändern. Vertreter intuitiver Theorien gehen davon aus, dass sich ein solcher individueller Bedeutungswandel in einem Spezialbereich in vielen verschiedenen Schritten vollzieht. Dementsprechend gelingt es z.B. vielfach erst Fünft- oder Sechstklässlerinnen/-klässlern, den Begriff „Rechteck" als Oberbegriff für „Quadrat" zu verstehen.

Aus didaktischer Sicht ergibt sich hieraus, dass Lehrkräfte intuitive Begriffsbildungen von Schülerinnen/Schülern als konstruktiv gewachsene und individuell geprägte Erkenntnisse einordnen müssen, die meist relativ stabil in zusammenhängende Wissenssysteme der Kinder integriert sind. Es handelt

[1] z.B. mithilfe der Endlosfigur Pentagramm, des Wettlaufes zwischen Achill und einer Schildkröte, des Goldenen Schnittes bzw. der stetigen Teilung, des Hotels mit unendlichen vielen Zimmern oder gar der Dedekindschen Definition (vgl. ebd.)

sich also ggf. um alternative Denkweisen und nicht um einzelne faktische „Fehler". Eine „Korrektur" vonseiten einer Lehrkraft ist nur möglich, wenn das Gesamtsystem des Wissensnetzes verändert wird. Der Wandel von Rahmentheorien vollzieht sich aber im Allgemeinen langsam über größere Zeiträume hinweg und ist durch Instruktion nicht direkt bzw. nicht ohne Probleme zu erreichen[2]. Der „Schlüssel" zur Korrektur solcher intuitiver Theorien von Kindern besteht dementsprechend darin, diese zu verstehen und mit den Kindern gemeinsam in der Interaktion neues Wissen zu konstruieren, zu vertiefen und zu verändern, anstatt sie zu „instruieren". Es erscheint plausibel, dass sehr junge, unerfahrene und „unwissende" Kinder verstärkt dazu neigen, „fehlerhafte" intuitive Theorien zu entwickeln und auf diesen zu beharren. Methoden des formativen Assessments sind hierfür, wie bereits eingangs herausgestellt, ein entscheidender „Schlüssel" für Lehrkräfte, individuell geprägte Sinnkonstruktionen von Kindern zu erkennen und zu verstehen sowie in angemessener Weise mit ihnen umzugehen.

Literatur:

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler. Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. (1999). Notwendigkeiten und Möglichkeiten einer verstärkten Integration mathematisch begabter Kinder in den „normalen" Unterricht. Mathematische Unterrichtspraxis IV. Quartal, 3-11.

Käpnick, F. (2010). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse". Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern. Münster: WTM-Verlag.

Käpnick, F. (2016). Intuitive Theoriekonstrukte als stetige Begleiterscheinung des individuell-konstruktiven Lernens von Kindern. In R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.), Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion (S. 114-130). Münster: WTM-Verlag.

ÖZBF (2017). Wege in der Begabungsförderung. Salzburg: ÖZBF.

Piaget, J. (2000). Psychologie der Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta.

Seife, Ch. (2002). Zwilling, der Unendlichkeit. Eine Biographie der Zahl Null. München: Goldmann.

Sjuts, B. (2017). Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen. Münster: unveröffentlichte Promotion.

Sodian, B. (2002). Entwicklung begrifflichen Denkens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie (5. Aufl., S. 443-468). Weinheim: Beltz.

[2] Ein solcher Prozess entspricht durchaus Wygotskis Lernprinzip von der „Zone der nächsten Entwicklung": Demnach sollen Kinder so gefördert werden, dass sie jenen Bereich der Entwicklung von Leistungseigenschaften (Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kenntnissen) und Verhaltenseigenschaften erreichen, der unmittelbar von ihrem jeweils bestehenden Ausgangsniveau zu einem nachfolgenden (aber nicht zu einem weit darüber liegenden) Entwicklungsschritt führt. Dies erfolgt durch pädagogische Anleitung bzw. Anregung.

Anhang:

Leitfragen zum Erfassen der individuellen Ausprägung einer mathematischen Begabung bei Schülerinnen/Schülern im mittleren Schulalter

1. Was sind deine Lieblingsaufgaben
   a) im Mathematikunterricht,
   b) in außerunterrichtlichen mathematischen Förderprojekten?
   c) Warum sind diese Aufgaben deine Lieblingsaufgaben?

2. Welche Aufgaben oder Aufgabentypen magst du nicht gern? Warum?

3. Findest du heute die gleichen mathematischen Themen oder Aufgaben wie in den ersten Schuljahren gut oder haben sich deine „Vorlieben" inzwischen verändert?

4. Löst du heute mathematische Probleme auf die gleiche Art wie in den ersten Schuljahren oder hast du deine Vorgehensweise inzwischen verändert? Welche Rolle spielen dabei deine in der Schulzeit gesammelten Erfahrungen?

5. Welches mathematische Problem war für dich bisher eine besonders „harte Nuss"? Warum war das so? Wie gelang es dir, die „Nuss" zu knacken?

6. Knobelst du beim Problemlösen generell lieber allein oder mit anderen zusammen?

7. Was glaubst du, woran liegt es, dass du schwierige mathematische Probleme lösen kannst?

8. Was glaubst du, woran liegt es, dass du schwierige mathematische Probleme mitunter nicht lösen kannst?

9. Wie fühlst du dich, wenn du eine schwierige Problemaufgabe lösen konntest?

10. Was ist für dich Mathematik?

11. Was fasziniert dich an der Mathematik?

12. Welche Bedeutung hat für dich Mathematik?

13. Seit wann interessierst du dich für Zahlen, für das Rechnen und für geometrische Formen?

14. Wer oder was hat dein Interesse an der Mathematik geweckt?

15. Hat sich seit Beginn der Schulzeit dein Interesse an der Mathematik verändert, in welcher Weise hat es sich evtl. vertieft, inwiefern gibt es für dich Interessenskonflikte mit anderen Tätigkeiten?

16. Welche Bedeutung hatte bzw. hat der Mathematikunterricht in der Schule für die Entwicklung deiner mathematischen Kompetenzen?

17. Was wäre für dich ein „idealer Mathematikunterricht"? Was würdest du dir wünschen?

18. Nimmst du an einem außerunterrichtlichen mathematischen Förderprojekt teil? Welche Bedeutung hat für dich die Teilnahme?

19. Was möchtest du einmal werden und warum möchtest du es werden?

20. Was weißt du oder was glaubst du machen Mathematiker/innen in ihrer beruflichen Tätigkeit?

21. Würde dich eine solche Tätigkeit auch interessieren?

Begabungsfördernde Leistungsrückmeldungen an kleine Matheasse

1. Begabungsfördernde Leistungsrückmeldung ist wertschätzende Leistungsrückmeldung

Jedes Kind erwartet (zu Recht) und benötigt beim Lernen Zuwendung und Anerkennung. Das gilt nicht zuletzt für mathematisch begabte Kinder. Diese werden im täglichen Unterricht nicht selten „links liegen gelassen", ihre besonderen Leistungspotenziale werden häufig weder von den Mitschülerinnen/Mitschülern noch von den Lehrkräften in angemessener Weise wertgeschätzt (vgl. z.B. Käpnick, 1999). Begabte Kinder, die sehr sensibel sind, leiden dementsprechend stark unter einer Missachtung oder einem Missverstehen ihrer besonderen Interessen und Neigungen. Ein Fallbeispiel soll belegen, dass kleine Matheasse unter diesen Voraussetzungen in einen „Teufelskreis" geraten können, der meist zu Frust, genereller Schulunlust bis hin zum Leistungsversagen führt (vgl. nachfolgendes Fallbeispiel Felix).

„*Felix* (4. Kl.) ist ein sehr wißbegieriger, phantasievoller, vielseitig interessierter und begabter Schüler. Er kann mathematische Sachverhalte meist viel schneller und zugleich komplexer als seine Mitschüler erfassen. Oft entwickelt er originelle Lösungsideen. Sein überdurchschnittliches Fähigkeitspotential führt aber dazu, daß er im Mathematikunterricht meist unterfordert ist und sich langweilt. Der „Verdammung zur Inaktivität" entzieht er sich, indem er sich eigene Erlebnisbereiche verschafft. So liest er unter der Bank Fachbücher zur Geschichte, zur Geographie oder zur Biologie, er knobelt an selbstausgedachten Aufgaben oder entwirft Comicfiguren. Dies ist für Felix aber keine befriedigende Situation. Er leidet vielmehr darunter, daß er sein mathematisches Fähigkeitspotential nur selten im Unterricht zeigen kann und daß er weder von seiner Lehrerin noch von seinen Mitschülern eine seines Erachtens angemessene Wertschätzung erhält. Für die anderen Jungen der Klasse hat der Sport, insbesondere das Fußballspiel, den höchsten Stellenwert. Für dieses Hobby hat Felix aber kein Interesse, und so kann er unter den Jungen auch nicht „mitreden". Felix ist zudem körperlich kleiner und schwächer als die meisten anderen Jungen seiner Klasse. Um aus der von ihm „zum Verzweifeln" empfundenen Situation herauszukommen, entwickelte er die „Strategie", im Unterricht den Klassenclown zu spielen. Er wollte durch witzige Zwischenrufe auf sich aufmerksam machen und die Anerkennung seiner Mitschüler gewinnen. Seine „Strategie" ging jedoch nicht auf. Von der Lehrerin wurde er wegen seines *„vorlauten und frechen Verhaltens*" gerügt, seine Mitschüler reagierten mit Unverständnis und werteten sein Auftreten als überheblich. Somit blieben Felix' Signale unverstanden, und es besteht die Gefahr, daß ernsthafte Schwierigkeiten in seiner Persönlichkeitsentwicklung, wie z. B. eine oppositionelle Haltung gegenüber der Schule oder Isolierung von Gleichaltrigen, nicht auszuschließen sind. Zudem droht Felix' ursprünglich vorhandenes großes Interesse für mathematische Knobeleien ins Gegenteil, in Desinteresse, umzuschlagen, da Beschäftigung mit Mathematik für ihn die als langweilig empfundene „Schulmathematik" bedeutet." (Käpnick, 1999, S. 4-5)

Eine wertschätzende Zuwendung zu Schülerinnen/Schülern schließt eine kompetenz- und nicht defizitorientierte Leistungsrückmeldung mit ein. Diese pädagogische Grundhaltung wird auch durch aktuelle neuropsychologische Forschungen gestützt. So verweist der bekannte Hirnforscher Roth darauf, dass alle einschlägigen Untersuchungen belegen, „dass Belohnung das geeignetste Mittel zur Verhaltensänderung ist" (Roth, 2007, S. 235). Dagegen wirken Bestrafungen, insbesondere inkonsequente Bestrafungen oder Missachtungen bzw. geringe Wertschätzungen von Leistungen eher demotivierend auf Lernende. Kompetenzorientierte Leistungsrückmeldungen sollten deshalb neben der

Bewertung von Sachkompetenzen stets auch Charakterisierungen des Lernverhaltens (Einstellungen, Motivationen, Anstrengungsbereitschaft, Sozialkompetenzen u.Ä.m.) einbeziehen.

2. Eine angemessene Begabungsförderung als Basis für begabungsfördernde Leistungsrückmeldungen

Parameter für einen gelingenden Mathematikunterricht sind neben den Faktoren der Zuwendung und Anerkennung herausfordernde, den individuellen Lernbedürfnissen und Kompetenzen der Kinder entsprechende Aufgaben. Für kleine Matheasse sind solche herausfordernden Aufgaben in der Regel offene substanzielle Problemaufgaben (vgl. Postertexte zum *„Forschenden Lernen"* und zu *„Offenen Aufgaben"*), mit denen sie ihren großen Spaß am Knobeln befriedigen und sich zugleich selbst mit tief empfundenen Glücksgefühlen (Flow-Erleben) belohnen können. Aus *diagnostischer Perspektive* können Schüler/innen beim Bearbeiten der Problemaufgaben ihr jeweiliges mathematisches Begabungspotenzial sehr gut nachweisen: Das Lösen erfordert meist

- weit überdurchschnittliche Fähigkeiten im Speichern und Abrufen mathematisch relevanter Informationen (im bzw. aus dem Arbeitsgedächtnis),
- im Erkennen, Angeben und dem Transfer von Strukturen,
- im flexiblen Wechseln von Repräsentationsebenen,
- im Umkehren von Gedankengängen sowie
- in Bezug auf eine besondere mathematische Kreativität und Sensibilität (vgl. Anhang: Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen).

Diese Fähigkeiten stehen gleichzeitig in einem engen inhaltlichen Zusammenhang zu den *prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards* für den Mathematikunterricht (Kompetenzen im Problemlösen, Argumentieren, Modellieren, Kommunizieren, Darstellen, Nutzen mathematischer Hilfsmittel und Arbeitsweisen). Lernsettings zu offenen substanziellen Aufgaben bieten Lehrkräften folglich sehr gute Möglichkeiten für eine sowohl „begabungsgerechte" wie auch den Bildungsstandards entsprechende Leistungseinschätzung. Geeignete inhaltliche Bewertungskriterien für Leistungsrückmeldungen an die kleinen Matheasse sind hierbei die genannten mathematikspezifischen Begabungsmerkmale. Zudem sollten kompetenzorientierte Leistungsrückmeldungen stets wertschätzende Einschätzungen zu begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften (vgl. Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen) sowie die Berücksichtigung des jeweiligen Lernentwicklungsstandes eines Kindes einschließen.

Problematisch oder sogar kontraproduktiv können Leistungsrückmeldungen für kleine Matheasse sein, wenn sie hauptsächlich auf Probleme oder Defizite der Rechenfertigkeiten, auf mangelnde Motivation beim Üben, auf unvollständige Lösungsdarstellungen u.Ä.m. fokussiert sind. Solche kritischen Aspekte sollten zwar in Leistungsrückmeldungen nicht grundsätzlich ausgespart werden, keineswegs aber zu einer überwiegenden Defizitorientierung führen. Zudem gilt es zu berücksichtigen, dass „kleine Matheasse" solch basale Leistungsanforderungen oder „Grundfertigkeiten" im Mathematikunterricht (wie etwa den Nachweis von Rechenfertigkeiten beim Lösen von „Päckchenaufgaben") meist nur als langweilige, für sie unnötige oder lästige „Pflichtaufgaben" empfinden (als lediglich „notwendiges Handwerkszeug"). Ihr Hauptfokus ist auf das Bearbeiten komplexer und offener Problemaufgaben gerichtet. Hierbei entwickeln und zeigen sie ihre besonderen und sehr wertvollen Leistungen und es gilt, die kleinen Matheasse diesbezüglich in jeder Beziehung zu unterstützen.

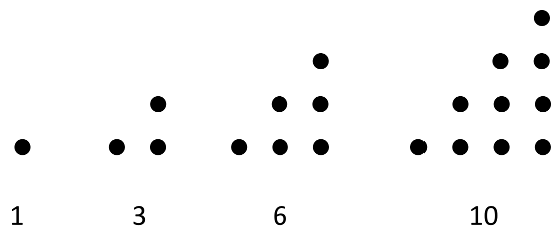
3. Didaktisch-methodische Empfehlungen für begabungsfördernde Leistungsrückmeldungen im Mathematikunterricht

Die in den Punkten 1 und 2 erörterten allgemeinen Aspekte begabungsfördernder Leistungsrückmeldungen im Mathematikunterricht verdeutlichen, dass diese Aufgabe für jede Lehrkraft sehr anspruchsvoll ist und einer kontinuierlichen Planungs-, Durchführungs- und Analysearbeit bedarf. Hierfür sind zunächst drei wichtige *allgemeine Anforderungen an eine Lehrkraft* herauszustellen:

- eine fundierte fachmathematische Kompetenz, um die vielfach originellen, z.T. nicht perfekten, aber im Kern substanziell wertvollen Ideen von kleinen Matheassen beim Bearbeiten offener Problemaufgaben zu verstehen und sie entsprechend wertzuschätzen,
- pädagogisches Geschick, um jedem mathematisch begabten Kind eine seinem individuell ausgeprägten Problemlösestil adäquate kompetenzorientierte und motivierende Leistungsrückmeldung zu geben,
- pädagogisches Geschick, um Schüler/innen zur Mit- und Eigenverantwortung für ihr Lernen zu befähigen.

Die aufgelisteten Anforderungen werden nachfolgend an einer authentischen Situation aus einer Förderstunde einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft verdeutlicht. Der im obigen Fallbeispiel vorgestellte Schüler Felix hatte mit seinen Mitschülerinnen/-schülern folgende Aufgabe zu lösen:

a)



Hier sind Kreise so angeordnet, dass Dreiecksanordnungen entstehen. Nach ein und derselben Regel werden die Dreiecksanordnungen schrittweise vergrößert.
Wie viele Kreise enthält die nächstfolgende Dreiecksanordnung?

b) Wie viele Kreise enthält die Dreiecksanordnung, die in der untersten Reihe aus 30 Kreisen besteht?
(Käpnick, 2001, S. 177)

Felix erkannte bereits beim ersten flüchtigen Lesen die Grundstruktur der Dreiecksanordnungen und schrieb dementsprechend sofort 15 als Lösungszahl für die Aufgabe a) auf. Dann starrte er etwa 30 Sekunden vor sich hin und notierte als Lösung der Aufgabe b): „900 : 2 = 450“. Hiermit zufrieden und von der Richtigkeit seiner Lösungen überzeugt, legte der Junge anschließend seinen Stift hin und lehnte sich zurück.

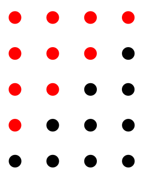
Welche Reaktion bietet sich im Sinne einer begabungsfördernden Leistungsrückmeldung an?

Um auf die Frage eine fundierte Antwort geben zu können, ist eine gründliche Analyse von Felix‘ Lösung und Lösungsverhalten notwendig.

- Aus *fachmathematischer Sicht* muss konstatiert werden, dass die Lösung der Aufgabe a) richtig und die der Aufgabe b) falsch ist. Die korrekte Lösungszahl zur Aufgabe b) ergibt sich nach der

Gaußschen Summenformel: (n • (n + 1)) : 2 = (30 • (30 + 1)) : 2 = 465, wobei n gleich der Anzahl der Kreise in der untersten Reihe ist. Dieser Lösungsansatz impliziert zugleich einen Wechsel der Repräsentationsebenen, denn in jeder Dreieckanordnung verbirgt sich die Summation der ersten n natürlichen Zahlen, wie z.B. in der vierten Dreiecksanordnung die Summenbildung 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

- Felix' Lösung zur Aufgabe b) enthält offenbar einen sehr kreativen und äußerst effektiven, aber nur „fast richtigen" Ansatz, der dem Kerngedanken der Gaußschen Summenformel prinzipiell entspricht. Wie zu vermuten war und sich dann in einem Analysegespräch mit Felix bestätigte, hat der Junge die Dreiecksanordnung gedanklich verdoppelt – zu einer Quadratanordnung von 30 mal 30 gleich 900 Kreisen – und diese Anzahl wieder halbiert. Somit hat er anstelle von (30 • (30 + 1)) : 2 die deutlich einfachere, aber fehlerhafte Rechnung (30 • 30) : 2 durchgeführt.
- Beeindruckend ist, dass Felix in solch kurzer Zeit die Grundstruktur der Dreiecksanordnungen richtig erfasst hatte, für das Lösen der anspruchsvollen Aufgabe b) problemlos und flexibel die Repräsentationsebenen wechseln konnte und eine verblüffend einfache Formel erkannt hatte, die annähernd der „genialen" Gaußschen Summenformel entsprach.
- Aus *pädagogischer Sicht* sollte eine Lehrkraft Felix' Leistung deshalb in erster Linie würdigen und sie aus diagnostischer Perspektive als ein Indiz für eine potenzielle mathematische Begabung werten. Das Lösungsverhalten und die kreative Lösungsidee deuten außerdem darauf hin, dass der Junge vom Problemlösestil her dem Typ des „intuitiven (kreativen) Problemlösers" (vgl. Fuchs, 2006; Käpnick, 2014) entspricht.
- Hieraus ergibt sich wiederum als *pädagogische Konsequenz*, Felix in seiner individuellen Ausprägung des intuitiven und kreativen Problemlösers zu stärken. Zugleich bietet sich für das *didaktisch-methodische* Vorgehen ein gemeinsames Analysegespräch der Lehrkraft mit dem Jungen an. Um seinen Denkfehler aufzudecken, könnte man in diesem Gespräch z.B. Felix' allgemeinen Lösungsansatz auf die vierte Dreiecksanordnung übertragen: (4 • 4) : 2 = 8. Felix' Fehler würde dann offensichtlich werden. Zusätzlich sollte Felix auf ikonischer Ebene die Richtigkeit der Gaußschen Summenformel verdeutlicht werden:



1 + 2 + 3 + 4 = (4 • 5) : 2 = 10

Abb. 1: Beispielbezogene geometrische Darstellung der Gaußschen Summenformel

Demgegenüber wäre es destruktiv, Felix vorrangig auf seine fehlerhafte Lösung zur Aufgabe b) hinzuweisen und ihm noch zusätzlich eine „mangelhafte Bereitschaft zur kritischen Überprüfung" seiner Ergebnisse vorzuhalten. Hier würde man nur die große Stärke von Felix, seine besondere Begabung im Entwickeln kreativer Lösungen für anspruchsvolle Problemaufgaben, schwächen.

Literatur:

Fuchs, M. (2006). Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Berlin: LIT.

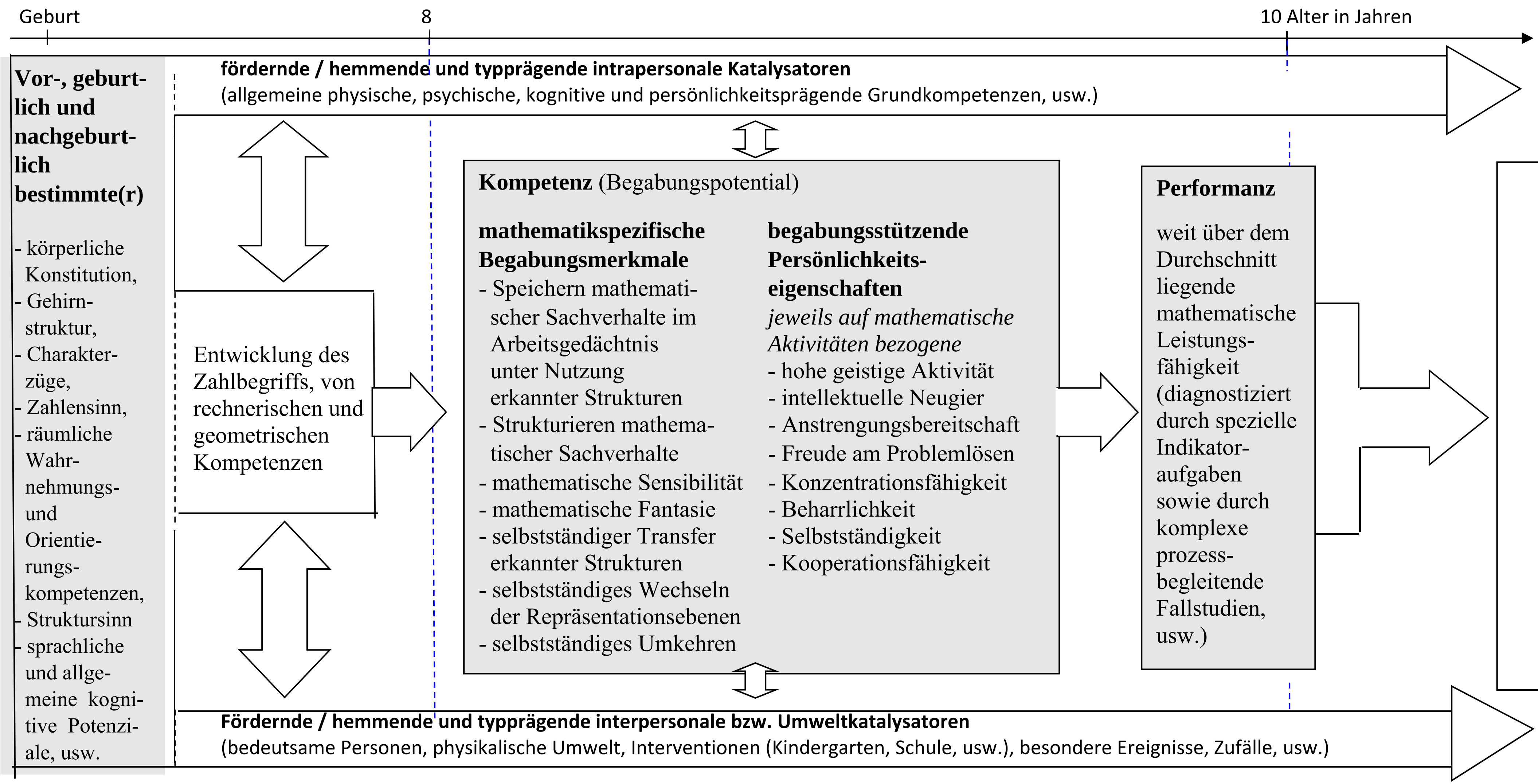
Käpnick, F. (1999). Notwendigkeiten und Möglichkeiten einer verstärkten Integration mathematisch begabter Kinder in den „normalen" Unterricht. Mathematische Unterrichtspraxis, IV. Quartal, 3-11.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler (Bd. 1). Berlin: Volk und Wissen.
Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer Spektrum.
Roth, G. (2007). Persönlichkeit, Entscheidung und Verhalten. Stuttgart: Klett-Cotta.

Anhang:

Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter (von Fuchs & Käpnick)

Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter (von Fuchs & Käpnick)



Außerschulische Fördermaßnahmen

In der Schulpraxis zeigt sich immer wieder, dass die individuellen Potenziale und speziellen Begabungen von mathematisch interessierten und begabten Kindern und Jugendlichen im regulären Schulunterricht meist nur eingeschränkt gefördert werden können. Als Hauptgründe geben Lehrkräfte hierfür ihre sehr hohe Arbeitsbelastung (große Klassen mit bis zu 30 Schülerinnen/Schülern; das Eingehen auf vielfältige, soziale und psychische Probleme der Kinder und Jugendlichen; das Umsetzen stetig neuartiger pädagogischer Anforderungen, wie z.B. das Erfüllen der Bildungsstandards, das Realisieren eines jahrgangsübergreifenden oder inklusiven Lernens) und die Fokussierung auf andere Schwerpunkte (wie etwa die Förderung von Kindern mit besonderen Lernbedarfen) an. Des Weiteren verweisen viele Lehrer/innen darauf, dass sie sich nicht ausreichend kompetent im Umgang mit begabten Schülerinnen/Schülern fühlen (vgl. Fuchs, 2009, S. 16). Somit erscheint es sinnvoll, Matheasse in Ergänzung zum regulären Unterricht auch in außerunterrichtlichen bzw. außerschulischen Projekten zu fördern.

Es folgt ein Überblick über außerschulische Fördermaßnahmen, deren Vorzüge, Probleme und Grenzen. Es existiert eine enorme Vielfalt an Organisationsformen. Wir beschränken uns in unserer Auflistung auf folgende einschlägig bekannte Fördermaßnahmen:

1. außerschulische Kurse während des Schuljahres (Arbeitsgemeinschaften)
2. Sommerakademien
3. mathematische Wettbewerbe
4. Korrespondenzzirkel
5. Internetprojekte

1. Außerschulische Kurse während des Schuljahres (Arbeitsgemeinschaften)

Außerschulische Förderprojekte können sowohl schulintern als auch schulübergreifend in vielen verschiedenen „Varianten" organisiert werden. Die einzelnen Förderprojekte unterscheiden sich z. T. erheblich hinsichtlich der inhaltlichen Schwerpunktsetzung, der theoretischen Fundierung, der Alterszusammensetzung und Anzahl der teilnehmenden Kinder, der Zeitdauer und Durchführungsintervalle usw.

In Österreich gibt es in allen Bundesländern zusätzliche Kurse, die während des Schuljahres für mathematisch interessierte und begabte Schüler/innen aller Klassenstufen stattfinden. Die Kurse werden entweder wöchentlich oder geblockt angeboten. Beispielhaft können hier die Talente Akademie Niederösterreich mit insgesamt 629 „Talentförderangeboten" für das Schuljahr 2017/18, die Pluskursangebote in Salzburg oder Talente Oberösterreich mit umfangreichen Kursangeboten genannt werden.

Exemplarisch wird an dieser Stelle das Konzept eines im deutschsprachigen Raum sehr bekannten außerschulischen Förderprojektes vorgestellt, und zwar das des Münsterschen Projektes „Mathe für kleine Asse":

> Das seit dem Schuljahr 2004/05 bestehende Projekt „Mathe für kleine Asse" wurde einerseits auf der Basis langjähriger Erfahrungen aus Vorgängerprojekten von Prof. Dr. Käpnick, dem Leiter des Münsteraner Projektes, und andererseits ausgehend von dessen Theorieansatz zur Kennzeichnung mathematisch begabter Kinder konzipiert (vgl. Käpnick, 1998, 2013; Fuchs, 2009, S. 20).
>
> Demgemäß sind die *Hauptziele des Projektes „Mathe für kleine Asse" in Bezug auf die teilnehmenden Kinder* nicht nur auf die individuelle Förderung der mathematischen Leistungspotenziale jedes teilnehmenden Kindes gerichtet, sondern auch auf die Entwicklung seiner kindlichen Gesamtpersönlichkeit. Zusammengefasst bestehen diese Ziele darin,

- den Spaß der Kinder am Umgang mit Zahlen, Formen und Mustern zu erhalten und zu vergrößern,
- die Freude der Kinder am problemlösenden Denken zu fördern und intellektuelle Neugier zu wecken,
- den Kernstoff des schulischen Mathematikunterrichts anzureichern und zu vertiefen,
- ein vielfältiges „Bild" mathematischen Tuns zu entwickeln (Entdecken, Forschen, Problemlösen, Theorien entwickeln; Anwendungsbezüge und Querverbindungen zu Naturwissenschaften, Technik, Architektur, Kunst usw. herstellen),
- die Persönlichkeitsentwicklung der Kinder zu stärken (z. B. Förderung des Selbstbewusstseins, der Anstrengungsbereitschaft, der Ausdauer, sozialer Kompetenzen).

Am stetig wachsenden Projekt nehmen derzeit insgesamt knapp 200 Kinder teil, die in Jahrgangsgruppen vom Vorschulalter bis zum achten Schuljahr gefördert werden. Dafür werden in allen Gruppen 90-minütige Förderstunden in einem zweiwöchigen Rhythmus durchgeführt. Hinsichtlich der Förderstunden lassen sich vier Organisationsformen unterscheiden:

- das Bearbeiten komplexer mathematischer Problemfelder
- ein Knobeln an Stationen
- mathematische Wettbewerbe (die auch der Diagnose der mathematischen Potenziale dienen)
- mathematische Exkursionen

Die dominierende Methode ist das *Bearbeiten komplexer Problemfelder*. Zu Beginn einer solchen Förderstunde lernen die Kinder anhand eines kleineren Ausgangsproblems ein Problemfeld kennen oder werden durch ein gemeinsames Gespräch auf ein mathematisches Thema „eingestimmt“. Die Einleitungsphase endet meist mit dem Herausarbeiten interessanter Fragestellungen für die nachfolgende „Forscherarbeit“. Die wichtigsten Erkundungsaufträge werden an der Wandtafel oder auf Arbeitsblättern festgehalten. Für die „Forschungsarbeit“ erhalten die Kinder vorbereitete Aufgabenblätter. Während die zeitlich relativ kurze Einstiegsphase von den Projektmitarbeiterinnen/-mitarbeitern moderiert bzw. geleitet wird, arbeiten die Kinder in der „Forscherphase“ eigenständig. Dabei können sie jeweils selbst bestimmen, ob sie allein oder in kleinen Gruppen arbeiten, ob und welche Hilfsmittel sie nutzen und wie sie ihre Ergebnisse darstellen wollen. Wichtig ist hierbei:

- Individuell bevorzugte Lern- und Denkstile der Kinder werden generell respektiert, sodass Kinder sich mitunter auch zeitweilig in eine Ecke zurückziehen und allein über ein Problem „brüten“ können (was auch oft – vor allem beim Finden einer „zündenden Idee“ – vorkommt).
- Die Kinder sollen immer wieder animiert werden, kreativ zu sein und eigene Ideen zu entwickeln.
- Die Mitarbeiter/innen und Studierenden beschränken sich darauf, Ansprechpartner/innen bei Fragen der Kinder zu sein und ihnen ggf. Impulse zu geben.

Der letzte Teil der Förderstunde dient einem gemeinsamen Vorstellen und Diskutieren der Ergebnisse. Die Moderation hierfür übernimmt im Allgemeinen eine wissenschaftliche Mitarbeiterin/ein wissenschaftlicher Mitarbeiter. Dies hat sich bewährt, da ein schnelles Erfassen und behutsames Bewerten der oft originellen und vielfach nicht leicht verständlichen Lösungsansätze der Kinder eine sehr anspruchsvolle Aufgabe ist (vgl. Käpnick, 2008).
Erprobte Aufgabenmaterialien zu allen Förderstundentypen, die im Übrigen auch für andere schulübergreifende oder schulinterne Arbeitsgemeinschaften genutzt werden können, finden interessierte Leser/innen in den Bänden „Mathe für kleine Asse“ (vgl. Literaturverzeichnis). In den Bänden wird ebenso das Auswahlverfahren im dritten Schuljahr beschrieben:

1. Stufe: Grobauswahl mathematisch potenziell begabter Kinder durch die Fachlehrer/innen
Die Mathematiklehrer/innen aus mehr als 20 Partnerschulen aus Münster und der näheren Umgebung wählen auf der Basis des von Käpnick und Fuchs entwickelten Merkmalsystems für mathematisch begabte Grundschulkinder (vgl. Käpnick, 2013) zu Beginn des Schuljahres bis zu drei Kinder pro Klasse aus. Dann entscheiden die vorgeschlagenen Kinder gemeinsam mit ihren Eltern über eine Projektteilnahme.
2. Stufe: Durchführung von Schnupperstunden
Die angemeldeten Kinder nehmen an ein bis zwei Schnuppernachmittagen teil und können sich dabei selbst ein Bild von den Inhalten, der didaktischen Gestaltung und der Lernatmosphäre im Projekt machen. Mit diesem Erfahrungshintergrund entscheiden sie gemeinsam mit ihren Eltern über eine weitere Teilnahme.
3. Stufe: Einsatz spezieller Indikatoraufgaben
Um das individuelle Begabungspotenzial der Kinder zu erfassen, wird ein „Einstiegswettbewerb“ durchgeführt. Hierbei löst jedes Kind Aufgaben, die sich inhaltlich an den von Käpnick entwickelten mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen orientieren (vgl. Käpnick & Fuchs, 2008).

4. Stufe: Prozessbegleitende Diagnostik

Die nachfolgenden Förderstunden dienen sowohl der vertiefenden und begleitenden Diagnose wie auch der individuellen Förderung jedes Kindes entsprechend seinem jeweiligen Begabungspotenzial. Die Diagnose umfasst

- die Analyse von Aufgabenlösungen der Schüler/innen,
- das Erfassen des Problembearbeitungsstils der Kinder beim Lösen von Aufgaben,
- die Durchführung und Analyse von Leitfadeninterviews mit den Kindern, deren Eltern und häufig auch deren Lehrpersonen,
- Indikatoraufgabentests und
- einen IQ-Test.

Ein großer Vorzug des Projektes „Mathe für kleine Asse“ besteht in der sehr langfristigen und kontinuierlichen Förderung der Kinder. So erlaubt das aufeinander „aufbauende“ System der Fördergruppen, dass Kinder von Beginn des dritten Schuljahres (seit 2016 sogar vom Vorschulalter) an bis zum Ende des achten Schuljahres am Enrichmentprojekt teilnehmen. Hierdurch erwerben die kleinen Matheasse ein breit gefächertes Repertoire von Problemlösekompetenzen und vertiefende Erkenntnisse zu verschiedenen mathematischen Teilgebieten. Zudem werden ebenso nachhaltig ihr Selbstbewusstsein und andere wichtige Aspekte der Persönlichkeitsentwicklung gestärkt. Darüber hinaus erwachsen sehr stabile emotionale Bindungen und Identifikationen der Kinder mit dem Projekt.
Weitere Vorzüge des Förderprojektes resultieren aus seiner Vielschichtigkeit und dem großen Netzwerk. Gegenwärtig tragen insgesamt sechs wissenschaftliche Mitarbeiter/innen, durchschnittlich 60 Studierende pro Semester und die bereits angesprochenen Kooperationen zu vielen Schulen zum Gelingen der vielfältigen Projektaktivitäten bei.

Abb.: Drei der vier Bände „Mathe für kleine Asse“

2 Sommerakademien für Schüler/innen

Sommerakademien werden in der Regel von unterschiedlichen Trägern während der Schulferien veranstaltet. Sie bieten begabten und interessierten Schülerinnen/Schülern eine intellektuelle und soziale Herausforderung, fördern sie in ihren Fähigkeiten und ermöglichen Kontakte zwischen Schülerinnen/Schülern mit gleichen Interessen und dies in einer lockeren Lernatmosphäre. Zudem fördern sie die Schüler/innen auf anspruchsvollem Niveau durch die Leitung von qualifizierten Lehrkräften. Sommerakademien bieten durch ihr Setting die Möglichkeit, sich besonders intensiv mit spezifischen Interessensbereichen zu beschäftigen. Es werden auch immer etliche Kurse aus dem Bereich Mathematik angeboten. Die Organisationsform der Sommerakademie kann den teilnehmenden Kindern durch einen geschickten Mix aus mathematischen Knobeleien, Sport, Spiel usw. besondere gemeinschaftliche Erlebnisse bescheren und das Knüpfen von sozialen Kontakten unter mathematisch interessierten oder begabten Kindern wirksam fördern.

In Österreich und Deutschland gibt es eine Vielzahl an Sommerakademien mit den unterschiedlichsten inhaltlichen und methodischen Schwerpunkten. Beispielhaft genannt sei hier die Sommerakademie der „Initiative Begabung" in Vorarlberg, die Sommerakademie Semmering des Landesschulrates für Niederösterreich, die Europäische Talente Akademie Lindau oder das „Mathecamp für interessierte Schüler der Klassenstufen 5 bis 11"der Leipziger Schülergesellschaft.

Einschränkend ist jedoch anzumerken, dass sich derartige Sommerakademien vor allem an mathematisch begabte und interessierte Schüler/innen der Sekundarstufe I und II richten. Für Grundschulkinder gibt es diese Angebote seltener. Ebenso sind die Teilnehmerzahlen für Feriencamps und Schüler/innenakademien meist begrenzt. Ebenso ist anzumerken, dass Zielintentionen (vgl. z.B. die Ziele des „Mathecamps der Superlativen") wie auch die Qualität von Feriencamps sehr verschieden sein können. Interessierte Bewerber/innen sollten die jeweiligen Konzepte und Rahmenbedingungen stets gründlich prüfen, u.a. auch berücksichtigen, inwiefern kommerzielle Absichten des Trägers eine Rolle spielen.

2. Mathematische Wettbewerbe

Mathematische Schüler/innenwettbewerbe zur Förderung besonders begabter oder interessierter Schüler/innen haben bereits eine lange Tradition. Einer der ältesten und bekanntesten Wettbewerbe ist der seit 1894 in Ungarn stattfindende *Eötvös-Kürschák-Wettbewerb*, der sich schnell großer Beliebtheit erfreute, was zu einer kontinuierlichen Verbreitung dieser Organisationsform in ganz Europa und darüber hinaus führte. Der heute bekannteste und anspruchsvollste Mathematikwettbewerb ist die **Internationale Mathematik-Olympiade (IMO)**. Sie wurde 1959 in Rumänien initiiert und wird seitdem jährlich in einem anderen Gastland veranstaltet. An der IMO nehmen inzwischen Matheasse aus über 80 Ländern teil. Vom Format ist es ein Klausurwettbewerb in verschiedenen Jahrgangsstufen (3. bis 13. Klassenstufe), der mathematisch begabten Schülerinnen/Schülern Gelegenheit zum Leistungsvergleich auf internationaler Ebene gibt. Neben dem fachlichen Wettstreit sind den Veranstalterinnen/Veranstaltern in den jeweiligen Ländern die Begegnungen junger Menschen aus allen fünf Kontinenten mit dem Ziel der Völkerverständigung wichtig. Für eine Teilnahme an der IMO qualifizieren sich die Schüler/innen in der Regel durch Landeswettbewerbe, wie z.B. durch die österreichische Mathematik-Olympiade (www.math.aau.at/OeMO/). Als Vorbereitung auf diesen Landeswettbewerb gibt es unverbindliche Übungen, bei denen teilnehmende Schüler/innen zwei Stunden in der Woche anspruchsvolle Problemaufgaben lösen und mathematische Theorieansätze kennenlernen.

Internationale Mathematik Olympiade (IMO)

Eine Chronik aller deutschen IMO-Teams von 1959 bis 1998 findet man in dem Buch „The German Teams at the International Mathematical Olympiads 1959–1998", herausgegeben von W. Engel, H.-D. Gronau, H.-H. Langmann und H. Sewerin in der Schriftenreihe von Bildung und Begabung e.V. Das Buch enthält ebenso eine Übersicht über alle Länder, die von 1959 bis 1998 an der IMO teilgenommen haben, sowie das derzeit gültige Reglement für die IMO. Es ist in der Bonner Geschäftsstelle erhältlich. Auf der IMO-Homepage www.imo-official.org können zudem offizielle Berichte mit Aufgaben und Teamfotos zu allen Jahrgangswettbewerben bis heute erfragt bzw. bestellt werden.

Den Landeswettbewerben gehen wiederum regionale Mathematikwettbewerbe in verschiedenen Stufen und häufig schulinterne Wettstreite voraus, wie die folgende Informationsübersicht für Österreich zeigt:

Stufensystem der österreichischen Schüler/innenwettbewerbe in Mathematik

Kurswettbewerb

Der Kurswettbewerb ist der erste Wettbewerb. Er dauert drei Stunden und findet im Vorbereitungskurs statt. Der Kurswettbewerb wird von der/vom jeweiligen Kursleiter/in erstellt und korrigiert. Die besten Schüler/innen dürfen ein paar Wochen später zum Gebietswettbewerb fahren.

Qualifikationswettbewerb

Der Qualifikationswettbewerb ist für jene Schüler/innen gedacht, die keine Möglichkeit haben, an einem Vorbereitungskurs teilzunehmen. Er wird in mehreren Städten abgehalten. Die Regeln sind dieselben wie beim Kurswettbewerb. Die besten Teilnehmer/innen jeder Stadt dürfen ebenfalls zum Gebietswettbewerb.

Gebietswettbewerb

Der Gebietswettbewerb ist der erste Wettbewerb, der in ganz Österreich einheitlich abgehalten wird. Er findet an drei Orten gleichzeitig statt. Die drei Gebiete sind:

- Österreich Ost: Wien, Niederösterreich, Burgenland
- Österreich Süd: Steiermark, Kärnten
- Österreich West: Oberösterreich, Salzburg, Tirol, Vorarlberg
- Für den Gebietswettbewerb erhalten die Schüler/innen vier Beispiele, für die sie vier Stunden Zeit haben. Es gibt einen Sitzplan; Teilnehmer/innen aus demselben Kurs dürfen während des Wettbewerbs nicht zu nahe beieinander sitzen. Die Siegerehrung erfolgt am nächsten Tag. Dabei wird bekannt gegeben, wer sich für den Bundeswettbewerb qualifiziert hat.

Bundeswettbewerb

Der Bundeswettbewerb findet in Raach am Hochgebirge statt. Er besteht aus zwei Teilen. Vor jedem Teil gibt es einen speziellen Vorbereitungskurs für alle Teilnehmer/innen am Bundeswettbewerb.

Der erste Teil des Bundeswettbewerbs – auch Zwischenwettbewerb genannt – dauert vier Stunden und 30 Minuten. Die Teilnehmer/innen erhalten auch hier vier Beispiele. Etwa die Hälfte qualifiziert sich für den zweiten Teil.

Der zweite Teil findet etwa zwei Wochen später statt. Der Wettbewerb dauert zwei Tage, an denen die Schüler/innen für jeweils drei Aufgaben vier Stunden und 30 Minuten Zeit haben. Die besten sechs Teilnehmer/innen qualifizieren sich für die IMO (vgl. Homepage der österreichischen Mathematik-Olympiade).

Ein weiterer sehr bekannter Mathematik-Wettbewerb für überdurchschnittlich leistungsstarke Kinder ist der „**Känguru-Wettbewerb der Mathematik**“. Bei diesem internationalen Wettbewerb lösen Schüler/innen der 3. bis 13. Klassenstufe Multiple-Choice-Aufgaben. Er findet einmal jährlich, meist am dritten Donnerstag im März in allen teilnehmenden Ländern gleichzeitig und auf Basis freiwilliger Teilnahme der Schulen statt. Der Wettbewerb beinhaltet 24 bzw. 30 Aufgaben, die die Schüler/innen in 75 Minuten lösen können. Die Aufgaben sind dabei nach Doppeljahrgangsstufen differenziert. Ein Hauptziel des Wettbewerbes besteht darin, den Stellenwert mathematischer Bildung an den Schulen zu stärken, die Freude an der Beschäftigung mit Mathematik zu wecken bzw. zu vertiefen und den Lehrkräften durch das Angebot an interessanten Aufgaben konkrete Anregungen für ihre Unterrichtsgestaltung zu geben (vgl. hierzu auch die Homepage des Känguru-Wettbewerbs).
Außerdem gibt es viele regionale und nationale Mathematikwettbewerbe für verschiedene Altersklassen, wie beispielsweise den Adam-Ries-Wettbewerb für Fünftklässler/innen in Sachsen, Thüringen und Oberbayern, den Hessischen Mathematik-Wettbewerb für Achtklässler/innen, den deutschlandweiten Pangea-Wettbewerb für

Jana Bugzel & Friedhelm Käpnick
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Schüler/innen der Klassen 3 bis 10 oder die deutschen Kopfrechenmeisterschaften für Kinder und Jugendliche[1]. Gemeinsam ist diesen Wettbewerben, dass die Teilnehmer/innen in mehrstufigen Ausscheidungswettkämpfen mehr oder weniger anspruchsvolle Knobel- bzw. Problemaufgaben in Form einer Klausur allein bearbeiten und anschließend die Lösungen nach einem einheitlichen Punkteschema bewertet werden, was wiederum die Basis für die jeweilige Platzierung darstellt.

Beispiel einer Klausuraufgabe aus einem Grundschulwettbewerb in Nordrhein-Westfalen (Deutschland)

Lisa hat neun Karten mit den Ziffern von 1 bis 9. Sie will die neun Karten so legen, dass die folgenden Aufgaben alle das Ergebnis 7 haben.
Wie muss sie die neun Karten legen?
Begründe, warum die Lösung eindeutig ist.

$\square + \square = 7$ $\square \bullet \square = 7$

$\square - \square = 7$ $\square : \square = 7$

Beispiel einer Klausuraufgabe von der 18. Internationalen Mathematik-Olympiade (1987):

Es sei eine natürliche Zahl ≥ 3. Man beweise: Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, für die je zwei beliebige Punkte einen irrationalen Abstand haben, und je drei beliebige Punkte ein nicht entartetes Dreieck mit rationalem Flächeninhalt bilden. (aus: alpha, H. 6/1987, S. 133)

Einerseits sind solche mathematische Wettbewerbe aufgrund ihres spielerischen Charakters bei vielen Schülerinnen/Schülern sehr beliebt. Durch die Würdigung der Sieger/innen in Form von Urkunden, kleinen Sachgeschenken oder sogar Veröffentlichungen in der lokalen oder überregionalen Presse haben sie für die betroffenen Schüler/innen zudem einen ideellen Wert.
Andererseits ist jedoch zu beachten, dass nicht alle mathematisch begabten Schüler/innen derartige Wettbewerbe mögen und dass sich Misserfolge in solchen Wettbewerben negativ auf weitere mathematische Aktivitäten eines Kindes auswirken können (vgl. Käpnick, 1998, S. 284). Ein weiteres Problem solcher Wettbewerbe liegt darin, dass die Punktbewertung bei der Lösung einer Aufgabe im Vordergrund steht und somit individuelle Lösungsstrategien sowie die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten nicht näher beachtet und gewürdigt werden (vgl. ebd.). Zudem kann in Frage gestellt werden, ob mit mathematischen Wettbewerben der Spezifik mathematischen Tätigseins ausreichend entsprochen werden kann, denn: Die Schüler/innen lösen in der Regel einzeln in einer vorgeschriebenen Zeit isolierte und in sich „geschlossene“ Aufgaben, die im Anschluss nach einheitlich festgelegten Bewertungskriterien bewertet werden (vgl. Sprengel 1996 und die nebenstehenden Aufgabenbeispiele). Den teilnehmenden Schülerinnen/Schülern wird dementsprechend nicht die Möglichkeit gegeben, sich mit anderen Kindern über ihre einzelnen Lösungswege auszutauschen, die jeweiligen Vor- und Nachteile einzelner Lösungswege zu diskutieren und ferner sich selbst Anschlussprobleme zu stellen (vgl. Käpnick, 1998, S. 285).
Die angesprochenen Probleme können weitestgehend vermieden werden, wenn alternativ **Gruppenwettbewerbe** durchgeführt werden. Bei dieser Organisationsform bearbeiten meist drei bis fünf Schüler/innen (die je nach „Spielregel“ leistungshomogen oder -heterogen, gleichaltrig oder nicht gleichaltrig sein können) eine oder mehrere komplexe Problemaufgaben. Sie können sich dabei gegenseitig helfen, sich z.B. über Lösungsideen, -wege oder -darstellungen austauschen, Aufgaben untereinander aufteilen und Ergebnisse gemeinsam zusammenstellen und präsentieren. Ansonsten sind die Rahmenbedingungen (Zeitvorgaben, Aufgabeninhalte, objektive Auswertungsregularien) ähnlich denen von Einzelwettbewerben. Beispiele solcher Gruppenwettbewerbe für Matheasse im dritten und vierten Schuljahr findet man z.B. in: Jansing, 2009 oder Heptner, 2009[2]. Die beiden Autorinnen stellen als besondere Vorzüge den großen Spaß der Kinder durch die vergleichsweise aufgelockerte Atmosphäre heraus, was insbesondere Mädchen als sehr angenehm empfanden. Positiv empfunden wurden weiters die wahrgenommenen Lernzuwächse durch den inspirierenden Gedankenaustausch und das Erleben eines gemeinsamen Erkundens neuartiger Probleme (vgl. Heptner, 2009, S. 107-109). Demgegenüber

[1] Hinsichtlich der Kopfrechenmeisterschaften ist anzumerken, dass zu diesem seit 2008 bestehenden Wettbewerb gegenwärtig erst ein mehrstufiges Qualifizierungssystem, beginnend mit Schulmeisterschaften, in Deutschland aufgebaut wird. Bisher gibt es in zweijährigen Rhythmen Landes-, Europa- und Weltmeisterschaften im Kopfrechnen (vgl. z.B. http://www.andreas-mohn-stiftung.de/deu/projekt/54/rechnen_um_den_titel)
[2] Bei Interesse können die Anleitungen zu den Gruppenwettbewerben bei Prof. Dr. F. Käpnick nachgefragt werden.

analysierten Jansing und Heptner auch Probleme von Gruppenwettbewerben, die insbesondere aus einer mangelhaften Kooperationsfähigkeit einzelner Kinder oder einer uneffektiven Teamarbeit resultierten (ebd.).
Ein zumindest in Deutschland sehr bekannter Gruppenwettbewerb, der neben der Interessen- und Begabtenförderung auf mathematischem Gebiet auch die Bereiche Naturwissenschaften, Informatik, Technik, Geo- und Raumwissenschaften sowie die Arbeitswelt umfasst, ist der Wettbewerb *„Jugend forscht / Schüler experimentieren"*. Er gliedert sich in zwei Sparten: die Juniorsparte „Schüler experimentieren", an der Kinder bis 14 Jahren teilnehmen, und die Sparte „Jugend forscht" für 15- bis 21-Jährige. Kleinteams mit zwei oder drei Personen (aber auch Einzelpersonen) können sich über Regional- und Landesauscheide bis zu Finalwettbewerben auf Bundesebene qualifizieren (vgl. Brinkmann, 2008). Eine Besonderheit dieser Wettbewerbsform besteht zudem darin, dass die Teilnehmer/innen ihre Forschungsthemen frei wählen können, diese dann auch weitestgehend selbstständig bearbeiten und schriftlich dokumentieren sollten. Konkrete Beispiele für solche mathematischen Forscherthemen sind etwa:

- Wie fallen Mikadostäbchen? (2000, 1. Preis in Mathematik/Informatik),
- Zahlenfolgen mit Schachfiguren (2001, Sonderpreis der ThyssenKrupp AG),
- Legefiguren mit drei Tangram-Spielen (2004, 2. Preis Mathematik/Informatik) (vgl. ebd.).

3. Mathematische Korrespondenzzirkel und Internetprojekte

Die Kernidee von Korrespondenzzirkeln und Internetprojekten besteht darin, dass interessierten Kindern per Zeitschrift bzw. auf dem Postweg oder per Internet anregende Knobel- oder komplexe Problemaufgaben angeboten werden, die sie innerhalb einer bestimmten vorgegebenen Zeit selbstständig bearbeiten können. Ihre Lösungen können sie dann an eine Kontaktadresse schicken, wo ein Expertinnen-/Expertenteam die Lösungen auswertet und besonders gelungene, originelle oder musterhafte Lösungen als „Rückmeldung" – für alle Beteiligten einsehbar – veröffentlicht. Auf diese Weise oder verbunden mit kleinen Sachpreisen werden zugleich die „besten" Aufgabenlöser/innen prämiert. Korrespondenzzirkel bzw. Internetprojekte können sich hinsichtlich der Zielgruppen (Alter der Schüler/innen), dem Charakter und der Komplexität der zu bearbeitenden Aufgaben, dem Zeitmanagement u.a.m. unterscheiden.
Konkrete Beispiele für solche Internetprojekte sind:

- die „Aufgabe des Monats" (ein von Käpnick und Fuchs in Kooperation mit dem Cornelsen-Schulbuchverlag initiiertes Projekt für mathematisch interessierte und begabte Grundschulkinder[3], an dem sich Kinder aus ganz Deutschland, Österreich, der Schweiz und Südtirol beteiligten; vgl. Fuchs 2008),
- „Mathematik rund ums Ei" (ein von H.-G. Weigand an der Universität Würzburg geleitetes Projekt, das internetgestützte interaktive Lerneinheiten zu mathematischen Begriffsbildungen für interessierte Schüler/innen der Klassenstufen 9 bis 11 anregt) oder
- der digitale mathematische Adventskalender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Positiv an diesen Angeboten ist, dass durch das Medium Internet *allen* interessierten und begabten Kindern aus einem oder mehreren Ländern eine Teilnahme ermöglicht werden kann. Des Weiteren bieten die Aufgabenangebote auch interessierten Lehrerinnen/Lehrern Anregungen für eine inhaltliche Bereicherung ihres Unterrichts wie auch für die individuelle Förderung kleiner Matheasse „vor Ort" (vgl. Fuchs, 2008, S. 130-131). Ein weiterer Vorzug besteht bei offenen Aufgabenangeboten darin, dass sie Kindern ermöglichen, die Aufgaben eigenständig zu bearbeiten und gleichzeitig mögliche Anschlussprobleme zu finden (vgl. ebd.). Aus der Offenheit der Aufgaben resultiert jedoch gleichzeitig ein erheblicher organisatorischer Aufwand, da die einzelnen Lösungswege differenziert analysiert werden müssen. Außerdem könnten fehlende finanzielle Mittel die Qualität solcher Angebote, z.B. hinsichtlich des Layouts der Aufgabenpräsentation oder der Archivierung der Schüler/inneneinsendungen, mindern. Demgegenüber sind Probleme bzgl. des Vorhandenseins eines Internetzugangs und elementarer PC-Kenntnisse der Schüler/innen für das Herunterladen der Aufgaben und Musterlösungen heutzutage eher unwahrscheinlich. Ein Nachteil besteht aber darin, dass Korrespondenz- oder Internetprojekte nur sehr eingeschränkte persönliche Kontakte zu und zwischen den teilnehmenden Kindern ermöglichen. Darüber hinaus erlauben die eingeschickten Lösungen keine bzw. eine nur sehr vage Diagnostik der

[3] Dieses Internetprojekt bestand von 2001 bis 2011. Auf der Homepage des Cornelsen-Verlages können die Monatsknobeleien aber immer noch heruntergeladen werden. Zudem sind sie in einem Jahresknobelkalender publiziert worden (Fuchs & Käpnick 2007).

mathematischen Begabungspotenziale von Kindern (vgl. ebd.). Auch langfristige Ziele sowie ein Beitrag zur individuellen Persönlichkeitsentwicklung des Kindes sind im Rahmen dieser Organisationsform kaum realisierbar.

Fazit

Viele der oben genannten Fördermöglichkeiten bieten mathematisch begabten und interessierten Kindern die Gelegenheit, sich auch außerhalb der Schule mit Mathematik zu beschäftigen bzw. ihr mathematisches Können auf eine ganz andere Art und Weise, als dies im regulären Mathematikunterricht der Fall ist, zu erleben. Die Entscheidung über eine Teilnahme an einer außerschulischen Fördermaßnahme hängt aber jeweils von der individuellen Ausprägung der mathematischen Begabung und der Persönlichkeitsstruktur eines Kindes ab. Es sollte immer auf eine gute Passung zwischen „Kind" und Angebotsform geachtet werden. Während z.B. manche mathematisch begabten Kinder sich gerne in Form von mathematischen Wettbewerben messen, sind diese für andere Kinder weniger gut geeignet, weil sich Misserfolge negativ auf ihr (mathematisches) Selbstkonzept auswirken können. Außerdem sollte stets beachtet werden, ob die Förderangebote langfristig Erfolge zeigen und inwieweit sie einer ganzheitlich geprägten Diagnostik mathematischer Begabungen gerecht werden.
Bei Förderangeboten außerhalb des Schulgebäudes muss auch immer ein gewisses Engagement von Seiten der Eltern bestehen. Das Bringen und Abholen der Kinder zu Förderstunden (z.B. alle 14 Tage beim Projekt „Mathe für kleine Asse") kann bei berufstätigen Eltern zu Problemen führen. Ein weiterer Nachteil ist der zusätzliche Zeitaufwand für die teilnehmenden Kinder (vgl. Ey-Ehlers, 2001, S. 118).
Zudem können finanzielle Probleme auftreten: Die meisten Angebote, wie beispielsweise Korrespondenzzirkel oder Internetprojekte, aber auch Fördermöglichkeiten im Rahmen von Arbeitsgemeinschaften, sollten allen Kindern unabhängig vom sozialen Status ihrer Eltern offen stehen. Lediglich kleine Aufwandsentschädigungen wie etwa Papierkosten sind vertretbar. Diese Angebote sind dann jedoch auf finanzielle Unterstützung durch Förderer angewiesen.
Des Weiteren kann eine Teilnahme an außerschulischen Förderangeboten erschwert werden durch eine geografisch zu große Distanz zum Ort des Angebotes oder auch durch Teilnehmer/innenbeschränkungen bei Feriencamps bzw. Schüler/innenakademien.
Grundsätzlich ist es wichtig, dass alle Angebote von den Kindern freiwillig in Anspruch genommen werden und nicht die (alleinige) Entscheidung der Eltern dahinter steckt. Im Projekt „Mathe für kleine Asse" werden die Kinder nach einem Jahr der Teilnahme ohne das Beisein ihrer Eltern gefragt, ob sie auch weiterhin das Angebot der Förderstunden wahrnehmen möchten, um so möglichen verpflichtenden Teilnahmen durch die Eltern entgegenzuwirken. Die Freude am Umgang mit Zahlen, Formen und Mustern soll nicht verloren gehen.

Literaturverzeichnis

alpha. Mathematische Schülerzeitschrift. H. 6/1987. Berlin: Volk und Wissen.

Brinkmann, A. (2008). Der Wettbewerb „Jugend forscht / Schüler experimentieren". Eine Plattform für kreatives mathematisches Arbeiten. In F. Käpnick & M. Fuchs (Hrsg.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (S. 186-195). Berlin: Lit Verlag.

Ey-Ehlers, C. (2001). Hochbegabte Kinder in der Grundschule – eine Herausforderung für die pädagogische Arbeit unter besonderer Berücksichtigung von Identifikation und Förderung. Stuttgart: ibidem-Verlag.

Fuchs, M. (2008). Internetprojekt „Aufgabe des Monats" – ein überregionales Förderangebot für mathematisch interessierte und begabte Kinder. In F. Käpnick& M. Fuchs. (Hrsg.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (S. 124-134). Berlin: Lit Verlag.

Fritzlar, T. & Rodeck, K. (2006). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler). Berlin: Cornelsen.

Fuchs, M. (2004). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Erst- und Zweitklässler). Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.

Fuchs, M. (2009). Mathe für kleine Asse (Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler; Bd. 2). Berlin: Cornelsen.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2007). Knobelkalender – Mathe für kleine Asse. Berlin: Cornelsen.

Heptner, N. (2009). Entwicklung eines Teamwettbewerbs zur Förderung mathematisch interessierter Grundschulkinder. Unveröffentl. Masterarbeit an der WWU Münster.

Jansing, S. (2009). Entwicklung eines Teamwettbewerbs für kleine Matheasse in der 3. und 4. Klasse. Unveröffentl. Masterarbeit an der WWU Münster.
Käpnick F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt a. M., Berlin, Bern, New York, Paris, Wien: Lang.
Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler; Bd. I). Berlin: Volk und Wissen.
Käpnick, F. (2008). „Mathe für kleine Asse" - Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In F. Käpnick& M. Fuchs (Hrsg.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (S. 135-148). Berlin: Lit Verlag.
Käpnick, F. (2013). Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In F. Käpnick (Hrsg.), Mathematische Begabungen – Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven (S. 9-39). Münster: WTM-Verlag.
Käpnick, F. & Fuchs, M. (Hrsg.) (2008). Mathematisch begabte Kinder – Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (Tagungsband). Münster: Lit Verlag.
Sprengel, H.-J. (1996). Mathematische Wettbewerbe im Grundschulalter. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1996/5, S. 131-135.

Internetquellen

http://www.info-official.org (Offizielle Homepage der IMO; zuletzt abgerufen am 29.09.2016)
http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/structure/home/homepage.php (zuletzt abgerufen am 16.07.2016)
http://www.deutsche-schuelerakademie.de/ (zuletzt abgerufen am 16.07.2016)
http://www.mathe-kaenguru.de/, zuletzt abgerufen am 19.07.2016
http://wwwmath.uni-muenster.de/42/en/arbeitsgruppen/didaktik/ag-prof-kaepnick/mathe-fuer-kleine-asse/ziele/ (zuletzt abgerufen am 16.07.2016)
http://www.andreas-mohn-stiftung.de/deu/projekt/54/rechnen_um_den_titel (zuletzt abgerufen am 17.7.2016)
http://www.wuepro.mathematik.uni-wuerzburg.de/projekte/mathe_rund_ums_ei/index.html (zuletzt abgerufen am 17.7.2016)
https://www.mathekalender.de/ (zuletzt abgerufen am 17.7.2016)
http://www.oemo.at/de/ (zuletzt abgerufen am 17.7.2016)
http://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Mathecamp (zuletzt abgerufen am 17.7.2016)

JANA BUGZEL &. FRIEDHELM KÄPNICK
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
UND DER INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Vorzeitiges Einschulen oder Überspringen einer Klassenstufe als Fördermaßnahme für ein mathematisch begabtes Kind (in der Grundschule)

Vorzeitiges Einschulen oder Überspringen einer Klassenstufe ist für mathematisch begabte Schüler/innen eine häufig angewandte Fördermaßnahme.[1]
Die Hauptgründe sind hier möglicherweise schlichtweg praktischer Natur: Für die Umsetzung sind weder zusätzliche personelle Ressourcen seitens der Schule noch die Entwicklung spezieller Förderkonzepte oder die Anschaffung besonderer Lernmittel notwendig. Auch hinsichtlich der Organisation des schulischen Lernens ergeben sich keine Veränderungen – die betroffene Schülerin bzw. der betroffene Schüler „springt“ einfach in eine nächsthöhere Klassenstufe.
Bezüglich nachhaltiger Erfolge dieser Maßnahmen für eine „beschleunigte“ kindliche Förderung zeigen zahlreiche Fallbeispiele und empirische Befunde (vgl. Vock, Penk & Köller, 2014; Vock, 2015) aber ein differenziertes „Bild“.

> Sich wechselseitig bedingende Hauptgründe für das Überspringen einer Klassenstufe aus der Sicht betroffener Kinder (nach Heinbokel, 2014):
>
> Erleben einer
>
> - permanenten kognitiven Unterforderung in wichtigen Unterrichtsfächern,
> - großen Frustration aufgrund der Unterforderung, aber auch der fehlenden Anerkennung durch Mitschüler/innen und Lehrkräfte sowie vieler Missverständnisse zwischen den Kindern und auch Lehrkräften;
>
> zugleich sehnlicher Wunsch nach
>
> - anspruchsvollen kognitiven Herausforderungen,
> - sozialer Anerkennung durch Mitschüler/innen und Lehrkräfte.

Einerseits belegen viele Einzelfälle, dass sich ein vorzeitiges Einschulen oder ein Überspringen einer Klassenstufe vorteilhaft auf die Förderung der mathematischen Begabung wie auch auf die kindliche Persönlichkeitsentwicklung auswirkte (vgl. Heinbokel, 2009). Dies ist in der Regel immer dann der Fall, wenn Kinder nicht nur auf mathematischem Gebiet den curricularen Lernanforderungen „um ein Jahr voraus“ sind, sondern auch die Entwicklung wichtiger sozialer und personaler wie auch körperlich-motorischer Kompetenzen sehr weit über dem durchschnittlichen Niveau gleichaltriger Kinder liegt. Dies entspricht durchaus dem Sozialverhalten vieler kleiner Matheasse, die aufgrund ihrer Akzeleration bekanntlich vielfach Freundschaften zu älteren Kindern pflegen oder bevorzugen. Aber selbst wenn spezielle Sozialkompetenzen oder Lernroutinen noch nicht so weit entwickelt sind, dass diese dem üblichen Niveau eines ein Jahre älteren Kindes entsprechen, kann ein vorzeitiges Einschulen oder ein Überspringen einer Klassenstufe ebenso die Entwicklung dieser Kompetenzen beschleunigen. Betroffene Kinder stellen sich den Herausforderungen solcher „Nebenentwicklungen“ meist äußerst motiviert, weil für sie die Vorteile ihrer Hauptperspektive, des glücklichen Erlebens von angemessenen mathematischen und allgemein-kognitiven Herausforderungen, im Vordergrund stehen.

Andererseits gilt es aber auch die Probleme und Grenzen dieser Akzelerationsmaßnahmen zu berücksichtigen: Diese können darin bestehen, dass im Gegensatz zu weit voraus „geeilten“ mathematischen und allgemein kognitiven Kompetenzen andere wesentliche Entwicklungsstränge, wie das Reifen sozialer oder physisch-motorischer Kompetenzen, hinterherhinken. Eine solche „Schieflage“ birgt grundsätzliche Gefahren für die gesamte kindliche Persönlichkeitsentwicklung (vgl. z.B. Vock, 2015). Ein vorzeitiges Einschulen oder ein Überspringen einer Klassenstufe könnte eine bereits vorhandene Schieflage noch verschlimmern und folglich zu einer Überforderung der betroffenen Kinder führen.

[1] Vock gab in ihrem Vortrag auf dem 5. Münsterschen Bildungskongress z.B. an, dass im Schuljahr 2011/12 in Deutschland 2.576 Schüler/innen (bzw. 0,04 % der Schüler/innen) eine Klassenstufe übersprangen. Die „Springer“ waren hauptsächlich Jungen (ca. 73 % dieser Schüler/innen) und vor allem Grundschulkinder (ca. 76 % der „Springer“) (vgl. Vock, 2015).

Hierfür gibt es ebenfalls viele authentische Einzelfälle aus der Schulpraxis bzw. der Begabtenförderung.
Einzelne Fälle zeigen darüber hinaus auf, dass ein vorzeitiges Einschulen oder ein Überspringen einer Klassenstufe zunächst erfolgreich verlaufen kann. In späteren Jahren, insbesondere in der Zeit der Pubertät, können sich dann aber Probleme ergeben, die auf eine fehlende Reifung, z.B. in sozialen Bereichen, durch ein „verpasstes Jahr Kindheit" zurückzuführen sind. Empirische Studien zeigen zudem auf, dass Schüler/innen, die eine Klassenstufe übersprungen haben, vor allem im Mittelstufenalter einen vergleichsweise geringeren sozialen Status unter den Mitschülerinnen/Mitschülern wahrnehmen, der auch negative Effekte hinsichtlich des sozialen Selbstkonzeptes nach sich zieht (vgl. Vock et al., 2014). Betroffene Kinder bzw. Jugendliche fordern in derartigen Fällen das „verlorene Jahr" vielfach wieder ein. Als Signale senden sie ihren Lehrkräften und Eltern meist eine deutliche Lernunlust, ein provozierendes Nichteinhalten üblicher schulischer oder häuslicher Verhaltensnormen u.Ä.m.
Bezüglich eines vorzeitigen Einschulens ist darüber hinaus zu beachten, dass die vorschulische Bildung (zumindest traditionell) eine andere Schwerpunktsetzung als die schulische Bildung hat. So stehen im Kindergarten – im Unterschied zum zielgerichteten und angeleiteten schulischen Lernen – ein freies Spielen und selbstgesteuertes Entdecken im Hauptfokus der Förderung. Für eine Entscheidung über eine vorzeitige Einschulung ist es deshalb unverzichtbar, die konkreten Förderkonzepte des betroffenen Kindergartens mit denen der Schule zu vergleichen und auf ihre „Passfähigkeit" hin zu prüfen. Außerdem sollte für eine diesbezügliche Entscheidungsfindung das mathematische Begabungspotenzial eines Kindes erfasst und analysiert werden. Eine gute Orientierungsbasis hierfür bieten das Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Vorschulalter von Fuchs, Käpnick und Meyer (vgl. Fuchs, 2015, S. 169, bzw. Anhang) und entsprechende Beobachtungsraster (Fuchs, 2015, S. 180), Leitfäden für Elterngespräche (ebd., S. 185) und für Erzieher/innen (ebd., S. 189) sowie „Indikatoraufgaben" (vgl. Meyer 2015).
Aus der Gegenüberstellung von Vorzügen und Problemen bei der Umsetzung der Akzelerationsmaßnahmen für kleine Matheasse ergibt sich, dass eine Entscheidung für eine solche Maßnahme stets sehr gründlich durchdacht und ihre Realisierung prozessbegleitend analysiert werden muss. Hierbei sind alle beteiligten Personengruppen, die betroffenen Kinder, ihre Eltern und die Lehrkräfte durchgängig einzubeziehen (vgl. Fuchs, 2015). Als Orientierungshilfen für Entscheidungs- und Verlaufsprozesse können Checklisten dienen, in denen neben den jeweils erreichten Leistungsniveaus der mathematischen Kompetenzen auch die Entwicklungsstände hinsichtlich weiterer kognitiver sowie sozialer, personaler und physisch-motorischer Fähigkeiten erfasst werden (vgl. Anlage).

Als „*Faustregel*" gilt: Eine Akzelerationsmaßnahme kann für ein kleines Matheass erfolgreich sein, wenn es neben einer weit voran geschrittenen Entwicklung mathematischer Kompetenzen zugleich eine weit überdurchschnittliche soziale, personale und physisch-motorische Entwicklung aufweist. Eine Garantie für ein Gelingen einer Akzeleration gibt es jedoch nicht.
Studien zeigen zudem, dass in Schulen, in denen kindorientiert und differenziert unterrichtet wird und in denen eine begabungsfreundliche Haltung herrscht, eine individuelle „Enrichmentförderung" dem Überspringen eindeutig vorzuziehen ist (vgl. Vock, 2015).
Schließlich sind bei Entscheidungsprozessen für ein vorzeitiges Einschulen oder Überspringen von Klassenstufen auch die jeweiligen *gesetzlichen Rahmenbedingungen* zu beachten (vgl. z.B. www.oezbf.at oder Alswede, Paukert, Piepert & Steinheider, 2013).

Die rechtlichen Grundlagen für Österreich zum vorzeitigen Einschulen und Überspringen von Schulstufen finden sich unter: www.oezbf.at > Publikationen > „Leitfaden Akzeleration. Vorzeitige Einschulung, Überspringen von Schulstufen, Wechsel der Schulstufen"

Literatur:

Alswede, N., Paukert, M., Piepert, D. & Steinheider, P. (2013). Handreichung zum Überspringen des Landes Hessen. Abgerufen von https://la.**hessen**.de/irj/LSA_Internet?rid=HKM_15/LSA_Internet/ sub/Hessen Logo, Hessische Lehrkräfteakademie, hessen.de [14.03.2018]

Carle, U. (2014). Anschlussfähigkeit zwischen Kindergarten und Schule. In M. Stamm (Hrsg.), Handbuch Talententwicklung. Theorien, Methoden und Praxis in Psychologie und Pädagogik (S. 161-172). Bern: Huber.

Fuchs, M. (2015). Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen. Seelze: Kallmeyer.

Heinbokel, A. (2009). Handbuch Akzeleration. Was Hochbegabten nützt. Berlin: LIT.

Heinbokel, A. (2014). Die Bedeutung des Klassenüberspringens für die Talententwicklung. In M. Stamm (Hrsg.), Handbuch Talententwicklung. Theorien, Methoden und Praxis in Psychologie und Pädagogik (S. 193-203). Bern: Huber. Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer-Spektrum.

Künne, T. & Sauerhering, M. (2012). Selbstkompetenz(-Förderung) in KiTa und Grundschule. Osnabrück: nifbe-Themenheft Nr. 4.

Meyer, K. (2015). Mathematisch begabte Kinder im Vorschulalter. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung zur Entwicklung mathematischer Begabungen bei vier- bis sechsjährigen Kindern. Münster: WTM-Verlag.

ÖZBF (2016). Leitfaden Akzeleration. Vorzeitige Einschulung, Überspringen von Schulstufen, Wechsel der Schulstufen. Salzburg: ÖZBF. Abgerufen von http://www.oezbf.at/publikationen/publikationen-des-oezbf/

k, M., Penk, Ch. & Köller, O. (2014). Wer überspringt eine Schulstufe? Befunde zum Klassenüberspringen im Deutschunterricht. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 61(3): 153-164.

Vock, M. (2015). Schneller durch die Schule - mehr gelernt? Empirische Befunde zum Überspringen einer Schulklasse. (bisher unveröffentl. Vortrag auf dem 5. Münsterschen Bildungskongress)

Anhänge:

- Checkliste: Entscheidungshilfe in Bezug auf das Überspringen einer Klassenstufe
  (Anmerkung: Die Checkliste kann prinzipiell auch als Entscheidungshilfe bei einer vorzeitigen Einschulung genutzt werden. Diesbezüglich sind jedoch Begrifflichkeiten und Anforderungsniveaus der speziellen Situation (Übergang vom Kindergarten in die Schule) anzupassen.)
- Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Vorschulalter von Fuchs, Käpnick & Meyer

Jana Bugzel &. Friedhelm Käpnick
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Überspringen einer Klassenstufe

1. Allgemeine Angaben

Name des Kindes: ___________________________________ Datum: _______________

Schule: ____ Klasse: _______________

Kontaktdaten:

Anschrift der Eltern/Erziehungsberechtigten:

____

E-Mail: ____ Telefon: _______________

Bereits vorgenommene Fördermaßnahmen:

____

____

2. Kennzeichnung des aktuellen Entwicklungsstandes des Kindes

2.1 Einschätzung der körperlichen Entwicklung

Körpergröße/-gewicht:

____

Grob- und Feinmotorik:

____

Händigkeit:

____

Allgemeiner Gesundheitszustand:

____

Seh- und Hörvermögen:

____

Besondere Auffälligkeiten:

____

____

2.2 Einschätzung der sozialen und personalen Reifung:

Ausprägung des Selbstkonzepts (eigenverantwortliches Lernen, Selbstvertrauen, Selbstwertgefühl, Umgang mit Misserfolgen, Frustrationstoleranz, usw.):

____

____

Ausprägung der Sozialkompetenzen (Einhalten von Verhaltensregeln, Verhalten gegenüber Gleichaltrigen und Älteren, Empathiefähigkeit, usw.) :

____

____

2.3 Einschätzung der allgemeinen kognitiven Entwicklung:

Allgemeine Gedächtnisfähigkeit:

____

____

Sprachliches Entwicklungsniveau:

____

____

Entwicklung von Fähigkeiten im Klassifizieren, Abstrahieren, Strukturieren, logischen Schlussfolgern, … :

____

____

Entwicklung von Wahrnehmungskompetenzen:

____

Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens:

____

2.4 Einschätzung spezieller begabungsstützender Persönlichkeitsmerkmale:

Wissbegier / hohe intellektuelle Neugier:

____

Konzentrationsvermögen beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben:

____

Selbstständigkeit beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben:

____

Ausdauerfähigkeit beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben:

____

2.5 Einschätzung des mathematischen Leistungs- bzw. Begabungspotenzials

Zahl- und Rechenkompetenzen (entsprechend den Lehrplanfestlegungen):

____

____

Kompetenzen im Umgang mit Größen, Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten:

____

____

Kompetenzen im Umgang mit Formen, Lagebeziehungen, Lageveränderungen (Kongruenz-, Ähnlichkeitsabbildungen, usw.):

____

____

Problemlösekompetenzen:

____

____

Kompetenzen im Argumentieren, Modellieren und Darstellen mathematischer Sachverhalte:

____

____

Kompetenzen im selbstständigen Erkennen, Angeben und im Transfer mathematischer Strukturen:

____

____

Kompetenzen im selbstständigen und flexiblen Wechseln der Repräsentationsebenen mathematischer Sachverhalte:

____

____

Besondere mathematische Sensibilität (Gefühl für Zahlen und Zahlbeziehungen, für ästhetische arithmetische oder geometrische Muster, für elegante Lösungswege, usw.):

____

____

Besondere mathematische Kreativität (Suchen und Finden andersartiger bzw. origineller Lösungswege, divergentes Denken, usw.):

____

____

____

Weitere Besonderheiten:

____

____

3. Zusammenfassende Einschätzung / Festlegung einer Fördermaßnahme:
(auch unter Berücksichtigung der Lernbedingungen in der jetzigen und der zukünftig geplanten Klasse bzw. Lerngruppe)

____

____

____

____

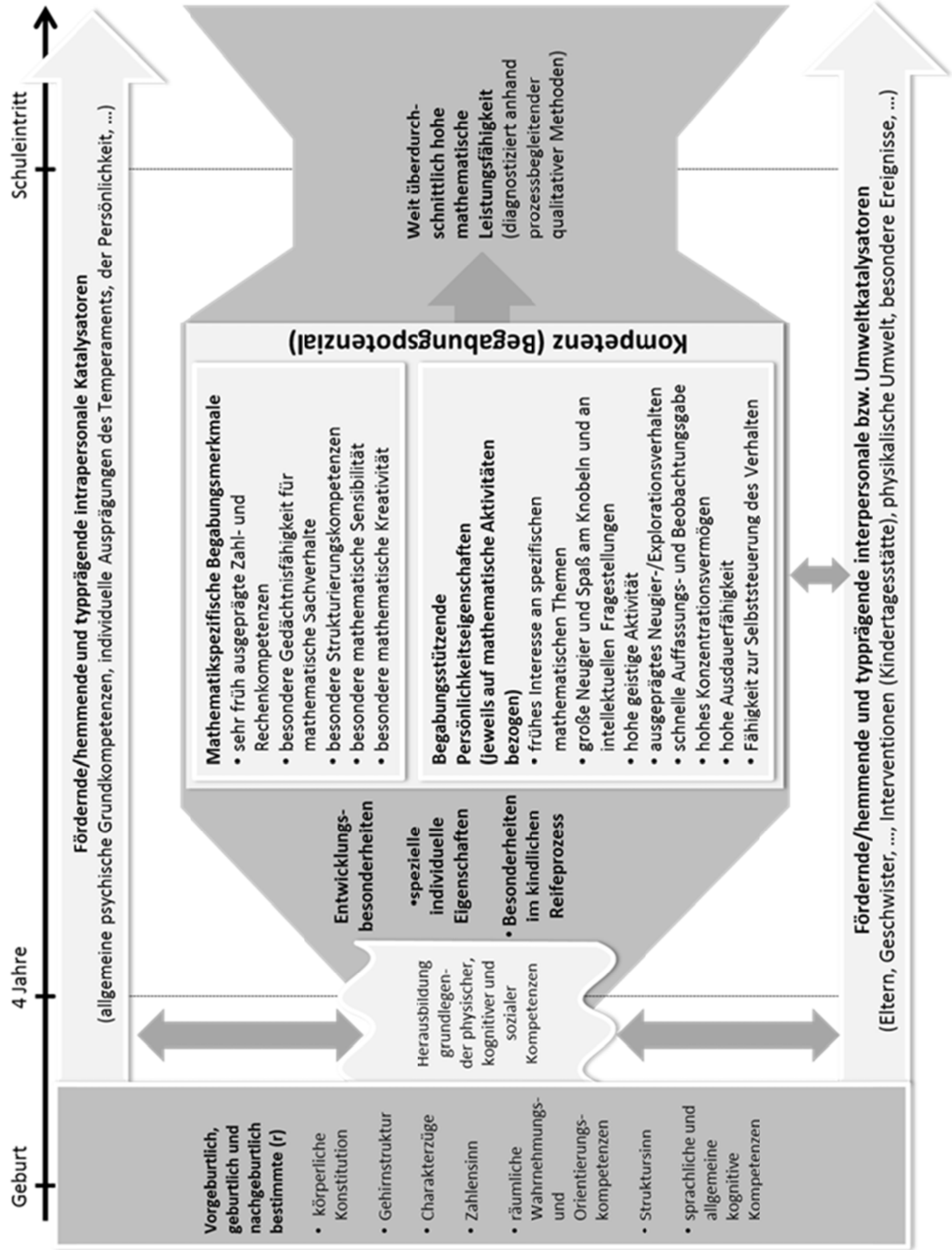
____

____

Unterschrift: ....

Jana Bugzel &. Friedhelm Käpnick
Institut für Didaktik der Mathematik
und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Modell mathematischer Begabungsentwicklung bei vier- bis sechsjährigen Kindern nach Fuchs/Käpnick/Meyer (vgl. Meyer, 2015, S. 249)



Mentoring – eine spezielle Organisationsform für die Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler

1. Kernideen von Mentoringprogrammen auf mathematischem Gebiet

Entsprechend der allgemeinen *Grundidee von Mentoring* nutzen Expertinnen/Experten (Mentorinnen/Mentoren) ihre Erfahrungen und Kompetenzen, um jüngere bzw. (noch) weitaus weniger leistungsfähige Kinder oder Jugendliche (Mentees) beim Erwerb mathematischer Kompetenzen bzw. bei der Entfaltung ihrer mathematischen Begabungen zu unterstützen. Dieser Wissens- und Kompetenztransfer sollte auf die individuellen Entwicklungspotenziale und -bedürfnisse der Mentees abgestimmt sein und durch eine auf gegenseitigem Vertrauen und Wohlwollen basierende Zusammenarbeit zwischen einer Mentorin/einem Mentor und den Mentees geprägt sein (vgl. Ziegler, 2009, S. 11). Damit die Vorzüge dieser Kooperationen auch zur Geltung kommen können, sind Mentoringförderprogramme in der Regel auf längere Zeiträume, oft mehrere Monate oder sogar mehrere Jahre hin ausgerichtet.

Die *wichtigsten Aufgaben einer Mentorin/eines Mentors* bestehen darin, den Mentees als Ratgeber/in, Motivator/in und Begleiter/in bei Lernaktivitäten zur Seite zu stehen und den Transfer von Wissen bzw. den Kompetenzerwerb der Mentees zu organisieren. Dies schließt in der Regel ein:

- gemeinsam mit der/dem Mentee Lernziele zu bestimmen,
- die Hauptinhalte und die Organisation der jeweiligen Förderprogramme (grob) zu planen,
- konkrete Aufgabenangebote zu unterbreiten und ggf. Hilfestellungen (im Sinne von „Hilfe zur Selbsthilfe“) zu geben,
- die Lernfortschritte der Mentees zu erfassen und zu analysieren und auf dieser Basis u.U. auch sinnvolle Veränderungen in Bezug auf die Ziele, die Inhalte oder die Organisation eines Förderprogramms vorzunehmen,
- die Mentees in der Entwicklung ihrer Selbstkompetenzen sowie ihrer gesamten Persönlichkeit zu stärken[1].

Die Ziele und Inhalte eines Mentoringförderprogramms sind sehr stark auf die individuellen Bedürfnisse und Potenziale der Mentees abgestimmt. Dies bietet ihnen viele Freiräume, die Ziele, die Inhalte, aber auch die Organisation in Abhängigkeit von der dynamischen Entwicklung des Förderprogramms zu präzisieren oder zu verändern. Dies gilt umso mehr, wenn die Förderprogramme das Bearbeiten eines komplexen Themenfeldes bzw. einer „Forschungsfrage“ zum Gegenstand haben. Aber auch beim zielgerichteten Erwerb einer bestimmten mathematischen Kompetenz (z.B. beim Beweisen geometrischer Sätze oder beim Programmieren von Rechenprozeduren) sollte den Mentees grundsätzlich ein Mitspracherecht bzgl. der inhaltlichen und organisatorischen Gestaltung des Förderprogramms eingeräumt werden.

Bezüglich der (zuletzt schon angesprochenen) *verschiedenen Typen* von Mentorinprogrammen kann unterschieden werden hinsichtlich

- der Anzahl der beteiligten Mentees im Sinne von Einzel-, Team- oder Netzwerkmentoring,

[1] Diese Funktionsbestimmung stimmt im Grundsätzlichen mit der eines Coachings überein. Hinsichtlich spezieller Unterschiede zwischen Mentoring und Coaching, die hier nicht relevant erscheinen, sei auf Rotering-Steinberg (2009) verwiesen.

- der Organisation (d.h. zwischen dem Stattfinden von gemeinsamen Sitzungen in regelmäßigen zeitlichen Abständen und einem zeitlich flexiblen E-Learning sowie verschiedenen Mischformen),
- eines sequentiellen und eines kaskadischen Mentorings (vgl. ebd.).

Dabei wird unter einem sequenziellen Mentoring ein Förderprogramm verstanden, *„bei dem ein/eine Mentee nacheinander verschiedene MentorInnen erhält“* (ebd.). Das kaskadische Mentoring ist dagegen dadurch charakterisiert, dass *„beispielsweise ein Professor Studierende supervidiert, die ihrerseits StudienanfängerInnen supervidieren“* (ebd.).

Als *besondere Vorzüge* der Mentoringförderprogramme kann man herausstellen, dass mit dieser Organisationsform

- sehr gut den individuellen Begabungen und Begabungsausprägungen sowie den speziellen Sachinteressen der Schüler/innen entsprochen wird,
- dem forschenden Lernen eine große Bedeutung beigemessen wird, einschließlich dem Finden, Bestimmen und Lösen von meist komplexen Problemen, dem Erkennen und Herstellen von Querbeziehungen zwischen verschiedenen Sachthemen, dem Argumentieren und Begründen von Zusammenhängen oder dem Darstellen komplexer Beziehungen und damit dem Wesen mathematisch-produktiven Tätigseins,
- die Schüler/innen nicht nur hinsichtlich ihrer fachspezifischen Begabung, sondern zugleich bzgl. der Entwicklung verschiedener Persönlichkeitsqualitäten („co-kognitive Fähigkeiten“; vgl. Renzulli, 2004) gefördert werden und
- wechselseitig auch die Mentorinnen/Mentoren in Bezug auf ihre Diagnose- und Förderkompetenzen sowie auf den Erwerb allgemeiner Professionskompetenzen einen sehr wirksamen Qualifizierungsschub erfahren können.

Das große „Lernpotenzial“ für die Mentorinnen/Mentoren resultiert aus dem stetigen Erleben authentischer Lehr-Lern-Situationen, in denen sie sehr enge Theorie-Praxis-Verknüpfungen herstellen und eine interdisziplinäre, ganzheitliche Perspektive auf Begabungs- und Begabtenförderung erhalten.
Für eine erfolgreiche Realisierung dieser Organisationsform bedarf es zweier grundlegender Voraussetzungen:

- fachlich, didaktisch und pädagogisch sehr gut qualifizierter und engagierter Mentorinnen/Mentoren,
- eines gut funktionierenden und flexiblen Organisationsnetzwerkes.

Da erfolgreiche Mentoringprogramme für die Förderung mathematisch begabter Schüler/innen oft kaskadisch strukturiert sind (vgl. die nachfolgenden Beispiele) kommt den Gesamtleiterinnen/Gesamtleitern der Projekte eine sehr große Bedeutung zu, weil sie in der Regel die Mentorinnen/Mentoren auswählen und sie meist im Rahmen des Förderprogramms „coachen“ bzw. unterstützen und darüber hinaus üblicherweise die Organisationsstruktur (zumindest im Groben) konzipieren.

2. Beispiele für Mentoringprogramme zur Förderung mathematisch begabte Schüler/innen

Im Folgenden werden drei verschiedene Beispiele vorgestellt, die als Anregung für die Konzipierung eigener Mentoringförderprojekte dienen können.

2.1 Forder-Förder-Projekt für besonders begabte Kinder der Klassenstufen 3 bis 6

Das unter der Leitung von Christian Fischer an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (WWU) geleitete Projekt ist ein Förderangebot für Kinder mit verschiedenen bereichsspezifischen, einschließlich mathematischen Interessen und Begabungen. Die beiden Hauptziele in Bezug auf die Förderung der Kinder bestehen darin, dass diese einerseits durch das Erstellen einer „Expertinnen-/Expertenarbeit" und eines „Expertinnen-/Expertenvortrages" zu einem speziellen Sachthema in ihren Begabungen herausgefordert werden. Andererseits werden die Schüler/innen durch den Erwerb der dafür erforderlichen Strategien des selbstgesteuerten Lernens in ihren Lernkompetenzen gefördert (vgl. Fischer, 2004a, S. 90; Fischer et al., 2013). Das Mentoringprogramm ist so organisiert, dass die Kinder ein ganzes Schuljahr über für eine wöchentliche Doppelstunde vom regulären Unterricht[2] frei gestellt werden, um in dieser Zeit an einem Einzel- oder Teammentoring zu ihrem jeweils ausgewählten „Expertinnen-/Expertenthema" teilzunehmen. Die Treffen werden von speziell geschulten Mentorinnen/Mentoren (Lehramtsstudierende der WWU) geleitet, die auf diese Weise im Rahmen ihres Studiums Diagnose-, Förder- und Professionskompetenzen erwerben. Somit kann das Mentoringprogramm als „kaskadisch" charakterisiert werden.

Das Förderkonzept ist grundsätzlich auf ein weitgehend eigenständiges Erarbeiten der jeweiligen Sachthemen durch die Schüler/innen angelegt. Konkrete Beispiele für solche, von Kindern gewählten mathematischen Expertinnen-/Expertenthemen waren bisher „Dualzahlen", „Römische Zahlen", „Alte Maße", „Uhren" oder „Mathematik und Kunst". Die schriftlichen Ausarbeitungen hierzu umfassen – je nach Thema und Gestaltungsstil der Schüler/innen – zehn bis zu mehr als 50 Seiten. Die Ergebnisse der Erkundungsprojekte werden zudem im Rahmen einer „Expertinnen-/Expertentagung" einem erweiterten Publikum vorgestellt (vgl. Fischer, 2004b). Diese Veranstaltung ist für alle Beteiligten stets ein besonderer Höhepunkt, bei dem die Dritt- bis Sechstklässler/innen nicht nur ihre erworbene Sachexpertise, sondern auch ihre Lernfortschritte hinsichtlich der Entwicklung von Selbstkompetenzen bewusst erfahren.

Abb. 1: Foto von der 14. Expertentagung des Forder-Förder-Projektes (2016), an dem insgesamt 115 Kinder teilnahmen.

Die Studierenden unterstützen die Schüler/innen durchgängig, sie beraten ihre Mentees bei der Themenauswahl oder bei Faktenrecherchen, sie erklären ggf. mathematische Sachverhalte und geben Hilfe beim Anfertigen der schriftlichen Ausarbeitung wie auch beim Vorbereiten der Vortragspräsentation. Weitere Auskünfte zu diesem Mentoringprojekt kann man unter www.icbf.de erhalten.

2.2 Bearbeiten von Forschungsthemen durch kleine Matheasse des siebten und achten Schuljahres im Projekt „Mathe für kleine Asse"

[2] Den vermittelten Stoff der versäumten Doppelstunden müssen die Kinder weitestgehend selbstständig „nachholen", was – je nach Lernthema – mit einem mehr oder weniger zusätzlichen Aufwand verbunden sein kann.

Die Idee für dieses ebenfalls kaskadisch strukturierte Mentoringkonzept entstand, als die Leiter/innen des Projekts „Mathe für kleine Asse“ an der WWU im zunehmenden Maße Motivationsprobleme unter den teilnehmenden Siebt- und Achtklässlerinnen/-klässlern feststellten. Konkret zeigte sich, dass das Bearbeiten eines komplexen mathematischen Aufgabenfeldes (vgl. z.B. Käpnick, 2001; Fritzlar, 2006; Käpnick, 2010) in den Jahrgangsgruppen der Dritt- bis Sechstklässler/innen in der Regel sehr gut „funktionierte“, dies aber offenbar nicht den weit auseinanderdriftenden Interessen der kleinen Matheasse im siebten und achten Schuljahr entsprach.
Als alternative Organisationsform entstand so ein Mentoringprogramm, das durch folgendes Vorgehen gekennzeichnet ist:

- Zu Beginn eines Semesters bzw. Schulhalbjahres werden die (in der Regel sechs bis acht) teilnehmenden Studierenden in Form einer Blockveranstaltung theoretisch und organisatorisch in ihre Mentorinnen-/Mentorentätigkeit eingewiesen. Hierzu gehört auch, dass sie Vorschläge für „Forschungsthemen“ entwickeln, die sie als Mentorinnen/Mentoren mit den Siebt- und Achtklässlerinnen/-klässlern im Verlaufe des Semesters bearbeiten wollen.
- Zugleich bestimmen die (zehn bis 20) teilnehmenden Matheasse des siebten und achten Schuljahres sie persönlich interessierende mathematische Themenfelder.
- In der ersten gemeinsamen Förderstunde werden die verschiedenen Vorschläge beider Gruppierungen vorgestellt und erörtert. Im Ergebnis erfolgt dann eine personelle Zuordnung zwischen den Studierenden (den Mentorinnen/Mentoren) und den Schülerinnen/Schülern (den Mentees) sowie eine inhaltliche Festlegung der „Forschungsthemen“, was auch jeweils schriftlich festgehalten wird.
- Die Hauptaufgaben der Mentorinnen/Mentoren bestehen nun darin, ein inhaltliches und didaktisches Konzept für das Vermitteln bzw. Erkunden eines mathematischen Themenkomplexes im Zeitraum des nächsten Halbjahres zu entwickeln und dieses in den im zweiwöchigen Rhythmus stattfindenden Förderstunden umzusetzen. Hierbei werden die Mentorinnen/Mentoren durchgängig von der Projektleitung- (zugleich Seminarleitung)[3] unterstützt, die ihnen aber auch bewusst viele Freiräume lässt.
- Es hat sich bewährt, die 90-minütigen Förderstunden nach folgendem Grundmuster durchzuführen: In den ersten ca. 30 Minuten stellt die Leitung kleinere Knobeleien aus jeweils verschiedenen mathematischen Teilgebieten vor (Zahlentheorie, Algebra, Euklidische Geometrie, Grafentheorie, Kombinatorik, Stochastik, Lineare Optimierung usw.), die alle teilnehmenden Schüler/innen bearbeiten. Dabei können diese selbst entscheiden, ob sie allein, zu zweit oder in Kleingruppen knobeln wollen. In der gemeinsamen Auswertung werden Ergebnisse, Lösungswege und originelle Ideen der Jugendlichen vorgestellt und miteinander verglichen. Auf diese Weise können alle Schüler/innen ein „Gemeinschaftsgefühl“ erleben (was sie sich auch trotz der unterschiedlichen mathematischen Interessen und Denkstile wünschen und zugleich wertschätzen) und es wird meist ein freudvoller Auftakt für den „Fördernachmittag“ geschaffen.
- Die verbleibenden 60 Minuten werden für das Erkunden eines mathematischen „Forschungsthemas“ in den verschiedenen Mentorinnen-/Mentorengruppen genutzt. Je nach Konstellation betreuen dabei ein oder zwei Studierende ein bis drei Schüler/innen. Die große inhaltliche Vielfalt lässt sich exemplarisch durch die Auflistung der Forschungsthemen aus dem letzten Durchgang aufzeigen: Logische Gesetze, Primzahlphänomene, Elfmeterstatistiken beim Fußball, Geheimschriften, Kopfrechentricks, spannende Größenangaben bei großen Vögeln.
- In der vorletzten oder letzten Förderstunde präsentieren die Mentees aus den jeweiligen „Forschungsteams“ allen teilnehmenden Schülerinnen/Schülern und Studierenden ihre erzielten Erkenntnisse. Hierzu können sie Poster, die Wandtafel oder auch PowerPoint-Folien nutzen.

[3] Für die Studierenden ist die Mentoringtätigkeit gleichbedeutend mit der Teilnahme an einem fachdidaktischen Wahlpflichtseminar.

- Die Studierenden reflektieren gemeinsam mit der Projektleitung nach jeder Förderstunde zum einen die Lernfortschritte, die -potenziale und -bedürfnisse jeder Schülerin/jedes Schülers und zum anderen ihre eigene Mentoringtätigkeit. Nach der letzten Förderstunde erfolgt zudem eine umfassende Gesamtauswertung mit allen Studierenden und der Projektleitung. Außerdem dokumentieren die Studierenden ihre Mentoringtätigkeit in Form einer schriftlichen Ausarbeitung, die zugleich einen wichtigen Bestandteil ihres Leistungsnachweises im Rahmen des fachdidaktischen Seminars darstellt.

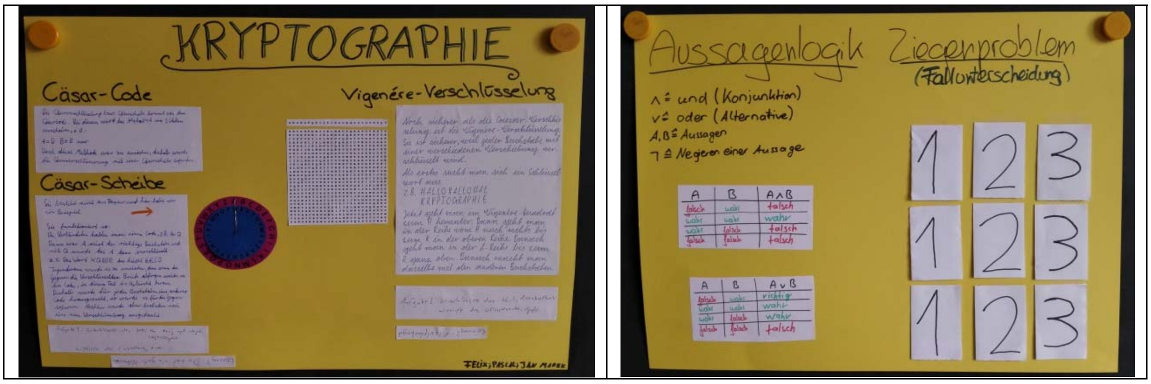


Abb. 2: Beispiele für Posterpräsentationen zu den Forschungsthemen „Kryptograpfie" und „Logik"

Die inzwischen zweijährigen Erfahrungen mit dem Mentoring-Programm sind durchwegs positiv. Die Studierenden haben zwar zu Beginn immer einen sehr großen Respekt vor der komplexen und für sie in vielerlei Hinsicht neuartigen Mentoringtätigkeit, sie nehmen die Herausforderung dann aber stets hochmotiviert an und „arbeiten" sich oft erstaunlich schnell in ihren Tätigkeitsbereich ein. Die Schüler/innen wiederum freuen sich prinzipiell auf das Erforschen eines selbstgewählten mathematischen Themas und gewinnen schnell Vertrauen zu ihren Mentorinnen/Mentoren. Sowohl die Mentees als auch die Mentorinnen/Mentoren schätzen gerade diese vertrauensvolle und unkomplizierte Zusammenarbeit in den Teilgruppen. Schließlich ist eine deutliche Qualitätsverbesserung hinsichtlich des Präsentierens der Forschungsergebnisse durch die Schüler/innen feststellbar. Waren im ersten Durchgang noch einige Jugendliche wenig motiviert und offenbar sehr unerfahren im Halten eines Kurzvortrags, nahm eine Mehrheit der Schüler/innen im letzten Durchgang die Herausforderung schon recht selbstbewusst an und gab gut strukturierte Überblicke über ihre gewonnenen Erkenntnisse – sogar mit interaktiven Gestaltungselementen.
Wer sich für diese Form des Mentorings interessiert, kann unter kaepni@wwu.de nachfragen.

2.3 Cyber-Mentor-Programm für begabte Schülerinnen im MINT-Bereich

Das Hauptziel des Cyber-Mentor-Programms besteht darin, „mehr Mädchen für Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik (MINT) zu begeistern und die Frauenbeteiligung in diesen Bereichen zu erhöhen" (Schimke et al., 2009, S. 249). Es richtete sich von 2005 bis 2007 an Schülerinnen zwischen 12 und 19 Jahren aus Baden-Württemberg (vgl. ebd., S. 253). Später kamen auch Schülerinnen aus anderen deutschen Bundesländern hinzu. Den interessierten Mädchen wurden verschiedene Angebote des E-Mentorings unterbreitet. So konnten sie regelmäßig mit E-Mail-Mentorinnen kommunizieren, die im MINT-Bereich tätig waren oder ein MINT-Fach studierten. Auf diese Weise lernten die teilnehmenden Mädchen Rollenmodelle und Vorbilder kennen, erhielten wichtige Informationen zu MINT und Einblicke in MINT-Berufe (vgl. ebd., S. 249). Ein anderes Angebot stellt eine *Community-Plattform* dar, die den interessierten Mädchen einen regen und vertrauensvollen Gedankenaustausch mit Mentorinnen und anderen Schülerinnen ermöglicht. Ein weiterer wichtiger „Baustein" des Cyber-Mentor-Programms ist das *CyberForum*, das den Teilnehmerinnen einen asynchronen Austausch erlaubt (ebd., S. 250). Das Forum umfasst mehrere Unterforen mit verschiedenen inhaltlichen Schwerpunktsetzungen (nach Tab. 1 aus: Schimke et al., 2009, S. 251):

Unterform	**Inhalt**	**Zielgruppe**
Tummelplatz	privater und alltäglicher Austausch über Themen, wie Berufswahl, Hobbies u.Ä.	Mentees und Mentorinnen
Schulisches	Diskussionsaustausch über Schule, Schulfächer und eventuelle Schulprobleme	Mentees und Mentorinnen
MINT-Talk	Gedankenaustausch über konkrete MINT-Themen, wie z.B. Zahl Pi, mathematische Phänomene, Wettbewerbe	Mentees und Mentorinnen
Probleme mit Cyber-Mentorinnen	Austausch über konkrete Probleme von Mentees mit Mentorinnen	Mentees
Mentorinnenecke	Gedankenaustausch unter Mentorinnen über ihre spezifische Tätigkeiten	Mentorinnen

Die Mentorinnen kamen überwiegend aus Deutschland und dem deutschsprachigen Ausland. Es beteiligten sich aber ebenso qualifizierte Betreuerinnen aus den USA, aus England oder Australien am Förderprojekt. Ihre Berufsfelder deckten den gesamten MINT-Bereich ab (vgl. ebd., S. 253-254). Das große Interesse an diesem E-Mentoring lässt sich mit den Teilnehmerinnenzahlen belegen: Im ersten Durchgang wurden 106 Paare und im zweiten Durchgang 230 Paare aus jeweils einer Mentorin und einer Schülerin gebildet (ebd., S. 254).
Als ein Hauptergebnis stellte die Projektleitung in ihren Analysen heraus, dass eine stärkere Beteiligung der Schülerinnen an den netzwerkartigen Mentoringangeboten auch zu einer längerfristigen Teilnahme der Mentees, aber auch der Mentorinnen führte (vgl. ebd.; S. 261-262). Das Ergebnis stellt somit – wie die beiden anderen hier vorgestellten Mentoring-Programme – die sehr große Bedeutung von engen und vertrauensvollen Beziehungen zwischen den Mentorinnen/Mentoren und den Mentees heraus. Schließlich erwies sich ein spezieller Vorzug des E-Mentoring-Projektes gegenüber Offline-Mentoring-Programmen darin, dass mit der Kommunikation per E-Mail oder Chat räumliche Barrieren „aufgehoben" wurden. So konnten insbesondere Mädchen aus ländlichen Gebieten, denen ansonsten meist wenige Förderprojekte „vor Ort" angeboten werden, von diesem E-Mentoring-Programm profitieren.
Aufgrund des Erfolges des Cyber-Mentor-Programms ist zukünftig eine deutliche Ausweitung geplant – auch im Hinblick auf die Begleitforschung. Interessierte können sich über aktuelle Entwicklungen des Cyber-Mentor-Programms unter www.cybermentor.de informieren.

Mentoringbegleitung für „Schüler/innen an die Hochschulen"

Interessierte Mathematiker/innen können in Österreich bereits während der Schulzeit Mathematik studieren. Das ÖZBF bietet bereits seit vielen Jahren das Programm „Schüler/innen an die Hochschulen" an, bei dem Schüler/innen bereits während der Schulzeit Vorlesungen an mittlerweile 20 österreichischen Hochschulstandorten besuchen können und nach abgeschlossener Reifeprüfung die abgelegten Lehrveranstaltungsprüfungen voll angerechnet bekommen. Das Projekt hat sich bewährt und wurde in den vergangenen Jahren sehr gut angenommen. Seit dem Studienjahr 2011/12 wird das Programm durch ein Mentoring durch ehemalige Schüler/innen, die am Programm „Schüler/innen an die Hochschulen" teilgenommen haben, ergänzt.

Die Schüler/innen werden von sozial und fachlich kompetenten Studierenden, die einmal selbst in der gleichen Situation waren, bei ihren ersten Schritten an der Universität logistisch und fachlich begleitet. Zudem sollen die Mentees die Möglichkeit haben, im Austausch mit ihren Mentorinnen/ Mentoren ihre persönlichen Ziele zu reflektieren. In diesem Prozess wird die Mentee/der Mentee von ihren/seinen Mentorinnen/Mentoren darin unterstützt, festgefahrene Muster und Einstellungen zu hinterfragen und neue Ideen und Erkenntnisse zu entwickeln.
Dazu werden die Mentorinnen/Mentoren vorab in einem Workshop auf ihre Aufgabe vorbereitet. Die zukünftigen Mentorinnen/Mentoren werden dabei in die lösungs-, ziel- und ressourcenorientierte Gesprächsführung eingeführt und haben die Möglichkeit diese ausführlich zu erproben. Die Mentorinnen/Mentoren begleiten ihre Mentees nicht nur in ihrer universitären, sondern auch in ihrer persönlichen Entwicklung.

Langfristiges Ziel ist es, die mentorielle Begleitung von besonders motivierten und interessierten Studienanfängerinnen/Studienanfängern zu einem wesentlichen Bestandteil universitärer Begabungs- und Begabtenförderung (als Anliegen der Hochschulen) zu entwickeln.
Weitere Informationen unter: www.oezbf.at > fördern & fortbilden > Fördermöglichkeiten > Schüler/innen an die Hochschulen > Mentoring

Literatur

Fischer, C. (2004a). Selbstreguliertes Lernen in der Begabtenförderung. In C. Fischer, F. J. Mönks, & E. Grindel (Hrsg.), Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung (S. 83-95). Münster: LIT.

Fischer, C. (2004b). Begabtenförderung als Herausforderung für die Schulentwicklung. *Journal für Begabtenförderung*. 3. Jg., H. 1,7-14.

Fischer, C., Rott, D. & Fischer-Ontrup, C. (2013). Lerncoaching in der schulischen Begabungsförderung. Aufgezeigt am Beispiel des Forder-Förder-Projekts Advanced. *Journal für Begabtenförderung.* 13. Jg., H. 1,32-42.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). Berlin: Volk und Wissen

Käpnick, F. (Hrsg.) (2010). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse". Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern (Bd. 2 der Reihe Schriften zur mathematischen Begabungsforschung). Münster: WTM-Verlag.

Renzulli, J. S. (2004). Eine Erweiterung des Begabungsbegriffs unter Einbeziehung co-kognitiver Merkmale. In C. Fischer & F. J. Mönks (Hrsg.), Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung (S. 54-82). Münster: LIT.

Rodeck, K. (2006). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Fünft- und Sechstklässler). Berlin: Cornelsen.

Rotering-Steinberg, S. (2009). Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Coaching und Mentoring. In H. Stöger, A. Ziegler & D. Schimke (Hrsg.), Mentoring: Theoretische Hintergründe, empirische Befunde und praktische Anwendungen (S. 31-51). Lengerich: Pabst Science Publishers.

Schimke, D., Stöger, H. & Ziegler, A. (2009). Prädiktoren einer langfristigen Teilnahme an einem E-Mentoring-Programm. In H. Stöger, A. Ziegler & D. Schimke (Hrsg.), Mentoring: Theoretische Hintergründe, empirische Befunde und praktische Anwendungen (S. 245-267). Lengerich: Pabst Science Publishers.

Stöger, H. (2009). E-Menoring: eine spezielle Form des Mentorings. In H. Stöger, A. Ziegler & D. Schimke, (Hrsg.), Mentoring: Theoretische Hintergründe, empirische Befunde und praktische Anwendungen (S. 227-243). Lengerich: Pabst Science Publishers.

Ziegler, A. (2009). Mentoring: Konzeptionelle Grundlagen und Wirksamkeitsanalyse. In H. Stöger, A. Ziegler, & D. Schimke (Hrsg.), Mentoring: Theoretische Hintergründe, empirische Befunde und praktische Anwendungen (S. 7-29). Lengerich: Pabst Science Publishers.

Wege in der Begabungsförderung im Fach Mathematik

Salzburg: Herausgeber ÖZBF

Kontakt: Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabungsforschung (ÖZBF)
Schillerstraße 30, Techno 12
A-5020 Salzburg

Tel.: +43/662-439581 / Fax: +43/662-439581-310
E-Mail: info@oezbf.at

ZVR: 553896729